LE TAVOLE DI VERITÀ
IN LOGICA DELLE PROPOSIZIONI

Estratto dal cap. III del volume:

GIANFRANCO BASTI, FRANCESCO PANIZZOLI, *Istituzioni di filosofia formale. Dalla logica formale alla ontologia formale,* LUP , Roma, 2018.

Modificato ad uso degli studenti del I Anno

3.2.1.1 Tavole di verità ($\mathbf{D_c}$)

Tre proprietà sono correlate ai connettivi logici e alle proposizioni che essi costituiscono:

- *determinatezza*: non si dà il caso che una proposizione sia indeterminata, ossia *non* abbia un valore di verità: ne ha sempre uno, e uno solo.
- *bivalenza*: una proposizione è vera o (*esclusiva*) falsa. Non si danno altre possibilità o alternative aletiche.
- *composizionalità*: una proposizione composta da più proposizioni semplici lo è in funzione di una compresenza di più connettivi che tra loro si combinano;
- *vero-funzionalità*: il valore di verità delle proposizioni composte è funzione del valore di verità delle proposizioni semplici (o atomiche)[103].

Vediamo come.

3.2.1.1.1 *Negazione*

Per il principio della stretta *bivalenza*, ogni proposizione è vera o falsa (e questa "o", come diremo tra breve, è disgiuntiva, è l'*aut-aut* latino). Per comodità dell'alunno talvolta indichiamo oltre alla simbologia classica del connettivo che si usa ormai in tutti i testi di logica compreso il nostro, anche quella più vetusta di Hilbert, che talvolta viene ancora usata.

p	$\neg p$ $\sim p$
1	0
0	1

[103] «La proposizione è una funzione di verità delle proposizioni elementari», *Tractatus*, 5.

Cruciale la questione della *doppia negazione* (**DN**): negare una proposizione negata, ri-assegna alla proposizione il valore di partenza:

p	$\neg p$	$\neg\neg p$ $\sim\sim p$
1	0	1
0	1	0

Si ha così che p è equivalente a $\neg\neg p$: è questa la stretta *dualità* della logica classica. La questione è cruciale sia da un punto di vista logico e tecnico – accenneremo al fatto che esistono dei calcoli per cui non è vera questa equivalenza: su tutti il *calcolo intuizionista* (cfr. 4.2.1.3.5 e 4.2.1.5.2) – sia da un punto di vista speculativo-filosofico[104].

3.2.1.1.2 *Congiunzione*

La congiunzione è vera solo nel caso che le due variabili abbiamo entrambe valore di verità uguale a 1 (la proposizione “piove e fa freddo” è vera se e soltanto se “piove” è vera *et* “fa freddo” è vera).

[104] Si pensi a tutte le filosofie che fanno della dialettica il loro focus teoretico (in cui è presente, dopo una tesi affermativa, un primo momento negativo, e un secondo momento negativo di “superamento”, “ritorno”, “sintesi”… ad una tesi affermativa), o tutte le filosofie dell’essere che trattano il tema della differenza ontologica, non solo da un punto di vista predicamentale, ma assoluto (il “mondo” come negazione di Dio; il “niente” come negazione dell’essere…): è tutt’altro che evidente, in questi casi, che la doppia negazioni riaffermi il punto di partenza.

p	q	$p \wedge q$ $p \bullet q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3.2.1.1.3 *Disgiunzione*

La disgiunzione è falsa solo nel caso in cui le due variabili abbiano entrambi valore uguale a 0.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3.2.1.1.3.1 Quattro sensi della disgiunzione "o"

Sottolineiamo che a proposito della disgiunzione "*p* o *q*", esistono almeno *tre sensi* diversi di cui bisogna tener conto in logica (più uno che aggiungiamo come senso "forte" di essa), che spesso dal linguaggio comune sono confusi. La precisione delle tavole di verità aiuta a distinguerli. I sensi sono:

a) *vel*: il senso dell'**alternativa** o **somma logica**, espresso dalla tavola di $p \vee q$ (1110), *falsa solo quando ambedue sono false*. Essa non esclude che le due disgiunte possano darsi insieme. Per esempio: "Ireneo è musicista o filosofo", potrebbe essere l'uno, l'altro o entrambe; il senso di "o" è propriamente quello di "e/o", del latino *vel*.

p	q	$p \vee q$ [vel/or]
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

b) *aut*: il senso della **disgiuntiva** espresso dalla tavola di $p \dot{\vee} q$ (0110), *vera solo quando una delle due è vera.* Essa esclude che le due disgiunte possano andare insieme e non esiste alcun'altra possibilità che scegliere una delle due. Come quando si dice: "O è giorno, o è notte"; è il senso latino dell'*aut- aut.*

p	q	$p \dot{\vee} q$ [aut aut]
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

c) *nand*: il senso dell'**esclusiva** espresso dalla tavola di $p|q$ (0111), *falsa solo quando ambedue sono vere* (è la negazione della congiunzione, per questo è detta *n-and*). Essa esclude solo che le due disgiunte possano andare insieme, ma non si esclude la possibilità che si possa non scegliere fra le due, perché esistono altre possibilità e dunque potrebbero essere ambedue false. Come quando si dice: "Ireneo è musicista o filosofo": potrebbe essere l'uno, l'altro o una terza opzione non menzionata, ma possibile. È il senso latino dello *aut* come distinto dall' *aut aut* e dal *vel.*

p	q	$p \mid q$ [nand, aut]
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

d) *nor*: il senso dell'**esclusiva "forte"** espresso dalla tavola di, $p \,\overline{\vee}\, q$ (0001), *vera solo quando ambedue sono false*. Essa esclude che si possa scegliere tra le due, e lascia aperta ad una possibilità "esterna". Come quando, dicendo "Ireneo non è musicista o filosofo", non si afferma né l'uno, né l'altro, ma una terza possibilità.

p	q	$p \,\overline{\vee}\, q$ [nor]
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Essa è una disgiunzione nel senso che è la negazione di *vel/or* (per questo è denominata anche *n-or*), ed indica la possibilità che la disgiunzione sia vera in un modo "fortemente" alternativo, ossia per nessun valore di p e q, ma per altri valori.

3.2.1.1.4 *Condizionale "se… allora" o Implicazione (materiale)*

Il condizionale "se… allora" a partire dai ***PM*** di Russell e Whitehead è stato definito "implicazione materiale" generando non poche confusioni, di cui quanto detto

in seguito è un'esemplificazione. La confusione nasce dal fatto che nella scienza moderna che segue il metodo ipotetico-deduttivo le premesse di una deduzione da cui si derivano le conclusioni sono sempre *ipotesi* e quindi sono interpretate come delle *condizioni* date le quali certe conclusioni possono essere derivate. Di qui la "tentazione" in cui cade Russell – che per questo fu fortemente criticato – di interpretare il condizionale "se… allora" come un'implicazione *materiale*, dove cioè essendo il ragionamento ipotetico la validità dell'inferenza permane anche se le premesse in certi contesti possono essere false. Ciò non è il caso della *implicazione logica* o *formale* dove le premesse devono essere assolutamente *vere*, in tutti i contesti perché l'inferenza sia valida. Ciò dove tutt'e due le "implicazioni" *materiale* e *formale* sono in accordo è che *mai* una premessa può essere vera e la conseguenza *falsa*. In sintesi, è una legge logica che "dal vero si può derivare solo il vero, dal falso sia il vero che il falso".
Facciamo un esempio di ragionamento ipotetico usando la legge fondamentale di ogni inferenza deduttiva, il *modus ponens* che poi vedremo: "se è giorno c'è il sole, ma è giorno, dunque c'è il sole" $((p \wedge q) \wedge p) \rightarrow q$. E' un'inferenza sempre valida sia "di giorno" quando p è vera, sia "di notte" quando p è falsa.
Facciamo un esempio di ragionamento *apodittico* (non-ipotetico) che è uno dei possibili casi di implicazione "formale": "Tutti gli uomini sono mortali, i Greci sono uomini, i Greci sono mortali". E' chiaro che questo sillogismo è valido se e solo se ambedue le premesse sono vere.
Vediamo come ora Russell imposta la questione, confondendoci non poco le idee.
«Una definizione di implicazione è assolutamente impossibile»[105], qualsiasi tentativo, appunto, *la implica*[106], e la lascia dunque come «operazione fondamentale»[107]. Nei ***PM*** è assunta come primitivo della logica (come *il* primitivo), con la dovuta distinzione, però, tra l'implicazione "formale" e l'implicazione "materiale". Il calcolo proposizionale si occupa solo della seconda, anche se la prima è quella con cui si ha generalmente più "familiarità". Ciò è dovuto, nota Russell, ad una confusione

[105] ***PM***, II, 16.

[106] «Sarebbe un circolo vizioso definirla dicendo che essa significa "*se* una proposizione è vera, *allora* un'altra è vera" perché i termini *se* e *allora* involgono già l'implicazione», ***PM***, III, 37.

[107] ***PM***, II, 16.

innanzitutto *psicologica* tra le due, prima che logica. Cerchiamo in breve di spiegarla.
Quando asseriamo o abbiamo a che fare con una proposizione come «Socrate è un uomo», in prima battuta ci viene in mente il filosofo ateniese del V sec a. C. e intendiamo la frase primariamente come una affermazione *su* (la verità di) Socrate, o comunque riguardante lui. Anche nel senso che, se al posto di Socrate vi fosse un altro nome (e dunque Socrate fosse al posto di una variabile x), la proposizione riguarderebbe il significato relativo alla nuova sostituzione. Non supponiamo affatto, ad esempio, che essa possa implicare qualcosa come «$2 + 2 = 4$». Questo modo di concepire la proposizione è l'approccio proprio della implicazione formale, secondo la quale dalla *verità* contenutistica della frase «Socrate è un uomo» (o «Platone è un uomo») si può inferire un'altra proposizione vera (ad esempio, «Socrate è mortale», o «Platone è mortale»[108]).

Al contrario, secondo l'implicazione materiale, non è di Socrate che si sta parlando quando ad esempio si scrive:
«Socrate è un uomo» *implica* «$2 + 2 = 4$»
ma della relazione tra due proposizioni, prese come un "tutto", ciascuna con un valore di verità, e un risultante valore di verità che segue dalla connessione dei due singoli valori di verità (secondo la nota tabella che vedremo tra poco). È la *validità* dell'implicazione che è in gioco, non il significato delle proposizioni. Perciò asserire
«2 è un uomo» *implica* «$2 + 2 = 4$»
oppure
«Socrate è un uomo» *implica* «Socrate è mortale».
è una operazione equivalente. Sebbene da un punto di vista psicologico l'attenzione vada subito al *significato* interno delle proposizioni, l'implicazione materiale connette solo il valore di verità delle due; e guarda caso tutte e tre le implicazioni sopra scritte sono *vere*. Cioè, detto in altri termini, l'implicazione materiale è vera quando è *valida*, quando funziona secondo la sua tabella, non in un altro senso semantico.

[108] Specifica Russell con acume che questo è il senso del perciò: «Socrate è uomo perciò Socrate è mortale». Il perciò richiede la verità contenutistica delle proposizioni che lega.

«La proposizione "*p* implica *q*" *asserisce* un'implicazione [materiale] benché non *asserisca p* né *asserisca q*»[109] e le considera, dunque, "chiuse" in se stesse (e dunque senza variabili libere all'interno). L'implicazione formale, invece, asserisce le singole proposizioni della forma $\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$ con x variabile libera. In riferimento alla sostituzione di x si ha un valore di verità (sia intensionale che estensionale) che chiude la formula. Ovviamente se si premette un quantificatore si ottiene

$$\forall x\ [\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)]$$

che se da una parte non è più una funzione proposizionale perché contiene variabili vincolate, e dunque è suscettibile di un valore di verità definito, dal punto di vista dell'implicazione essa è una implicazione formale concepita come una *famiglia* di implicazioni materiali di una certa classe. Per *ogni* sostituzione di termine, lo schema di proposizione diventa una proposizione chiusa, a valore costante, e dunque con un valore di verità. Quindi in un certo senso l'implicazione materiale è un caso particolare dell'implicazione formale. Infatti $\varphi(x) \Rightarrow \psi(x)$ è vera quando, per ogni valore di x, $\varphi(x) \to \psi(x)$. Questa circolarità che lega le due implicazioni è fonte spesso di confusione.
Il calcolo proposizionale ha comunque a che fare con l'implicazione materiale. Vediamone la tabella:

p	q	$p \to q$ $p \supset q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

I casi "strani" e contro-intuitivi della tabella, riguardano il fatto che

- una proposizione falsa (p) implica qualsiasi altra proposizione (*ex falso quodlibet*): 3° e 4° caso della tabella, in cui q può essere sia vera che falsa, e l'implicazione finale risultare comunque vera;

[109] ***PM***, III, 38.

- una proposizione vera (q) è implicata da qualsiasi altra proposizione (p) di cui è ininfluente il valore di verità: l'implicazione finale risulta comunque vera; 1° e 3° caso della tabella (cfr. cap. 11).

Nell'implicazione formale questo non avviene: l'implicazione è vera *se e solo se* il valore che rende vero l'antecedente rende vero anche il conseguente; non si ammette che l'antecedente sia vero e il conseguente falso. Per usare ancora qualche parola, si considerino le seguenti implicazioni:
«se 3 è un numero primo, allora 3 è divisibile per 2»;
«se 3 è un numero primo, allora Socrate vola».
C'è una differenza sostanziale tra la falsità di queste due implicazioni. Nella prima, che è *formale*, non è ammissibile che un tale antecedente vero («3 è un numero primo»)[110] implichi "contenutisticamente" una tale conseguenza falsa («3 è divisibile per 2»). Nel secondo esempio, invece, che è *materiale*, si ha una relazione tra due affermazioni, una vera e una falsa, che non sono in connessione contenutistica tra loro.

3.2.1.1.5 *Doppia implicazione*

La doppia implicazione (o *bi-condizionale* logico) è vera solo nei casi in cui le due variabili hanno il medesimo valore. Per questo si definisce anche *equivalenza logica.*

p	q	$p \leftrightarrow q$ $p \equiv q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

[110] Un numero naturale si dice *primo* se è divisibile solo per se stesso e per 1.

Questo è un connettivo derivato, può infatti scriversi come:

$$p \leftrightarrow q \iff (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

ma anche come $p \leftrightarrow q \iff \neg(p \dot{\vee} q)$. Immediato controllare la tavola di verità.