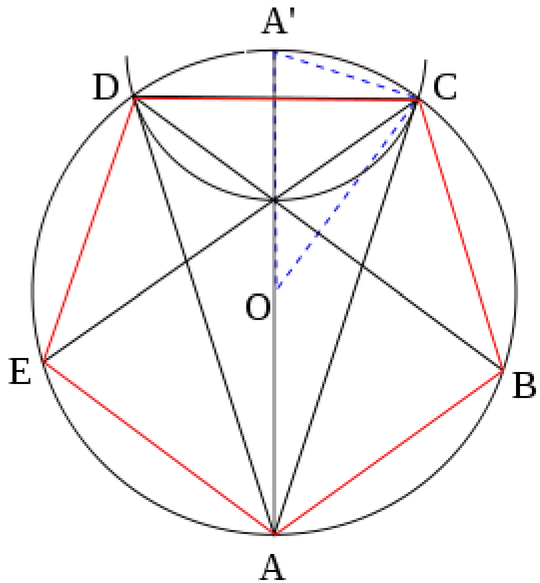
Algebra

Euclide e gli *Elementi*

Euclide fu "platonico di idee e di formazione"; intorno al 300 a.C. scrisse gli
Elementi, uno tra i più celebri trattati della storia della matematica, la presentazione elegante e completa della geometria e dell'aritmetica elementare del mondo greco.

Non si tratta di un lavoro del tutto originale nei contenuti: frequenti sono i riferimenti alla scienza precedente, peraltro non sempre facilmente individuabili a causa della scarsità delle fonti



Che cos'è l'algebra?

Il settore della matematica che consente di risolvere problemi come:

"Trovare il valore da assegnare a x affinché sia: $2x+1 = 7$"

dunque equazioni espresse mediante simboli specifici.

Risale al XVI secolo: algebra simbolica.

Una disciplina espressa meno tecnicamente può risalire al III secolo: algebra sincopata.

I problemi che noi oggi risolviamo algebricamente, però, sono presenti a partire dal II millennio a.C., espressi mediante descrizioni verbali: algebra retorica.

“Algebra” retorica : Egiziani e Babilonesi (2000 a.C.)

"Algebra" geometrica : il II libro degli "Elementi" di Euclide (III sec a.C.)

Diofanto di Alessandria "L'Aritmetica" (III sec.)

Mohammed Ibn Musa Al-Khuwarizmi "Al-jabr wal mukabalah" (VIII sec.)

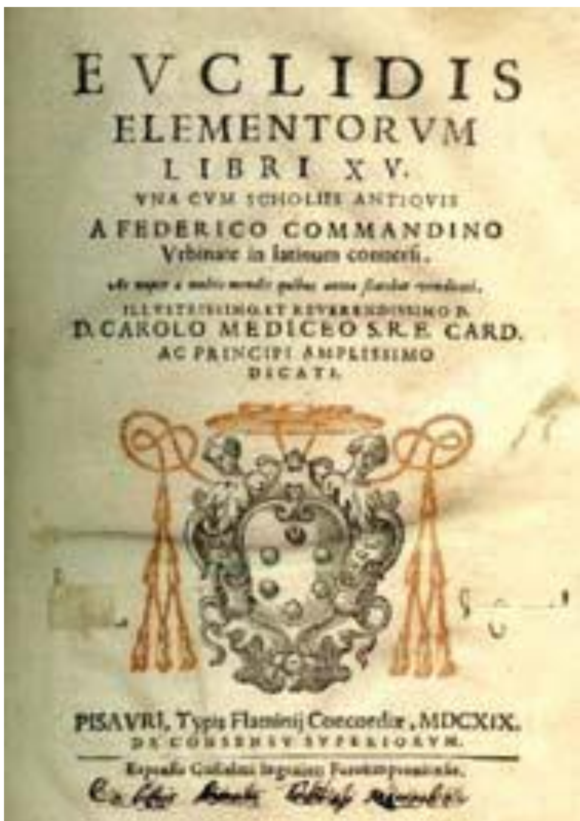
Algebra sincopata: Cardano, Tartaglia, Bombelli (XV-XVI sec.)

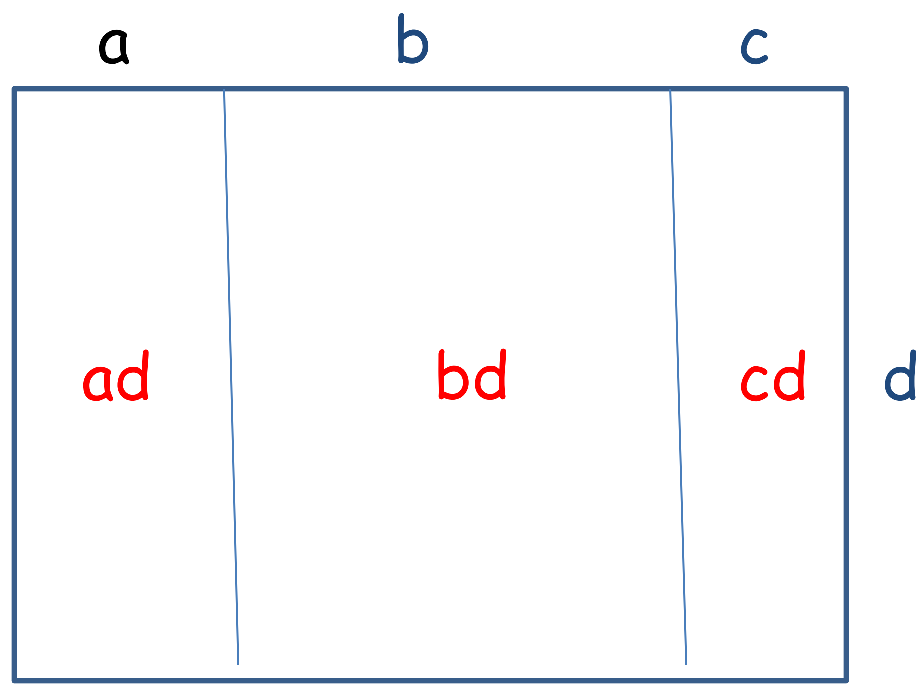
Algebra simbolica: François Viète (1540-1603)

L’algebra geometrica

Proposizione 1, II libro degli *Elementi*:

“Se si dànno due segmenti, e si divide uno di essi in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dai due segmenti è equivalente alla somma dei rettangoli compresi dal segmento indiviso e da ciascuna delle parti dell’altro”.



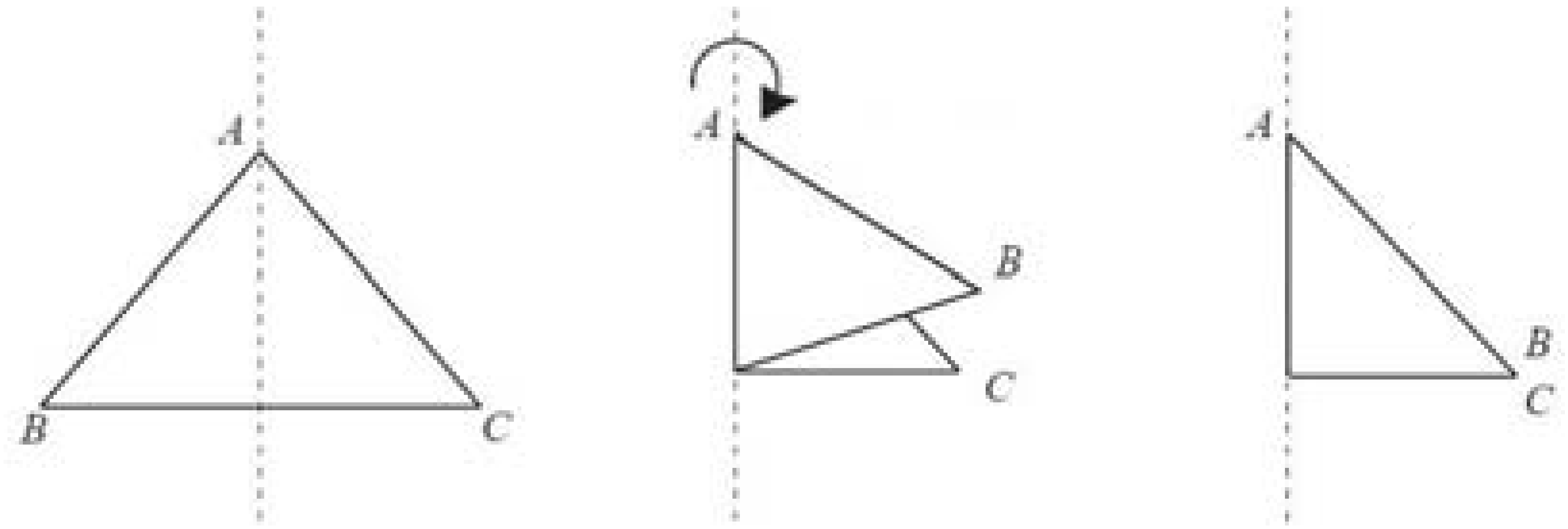


$$(a+b+c)d = ad+bd+cd$$

Attualità (anche didattica) di Euclide

Seguendo la classificazione di D. Tall (2001), molte dimostrazioni possono basarsi sulla visualizzazione

In geometria, ad esempio, l'aspetto visuale può essere collegato ad attività "fisiche". Dimostriamo che un triangolo con due lati uguali ha due angoli uguali:



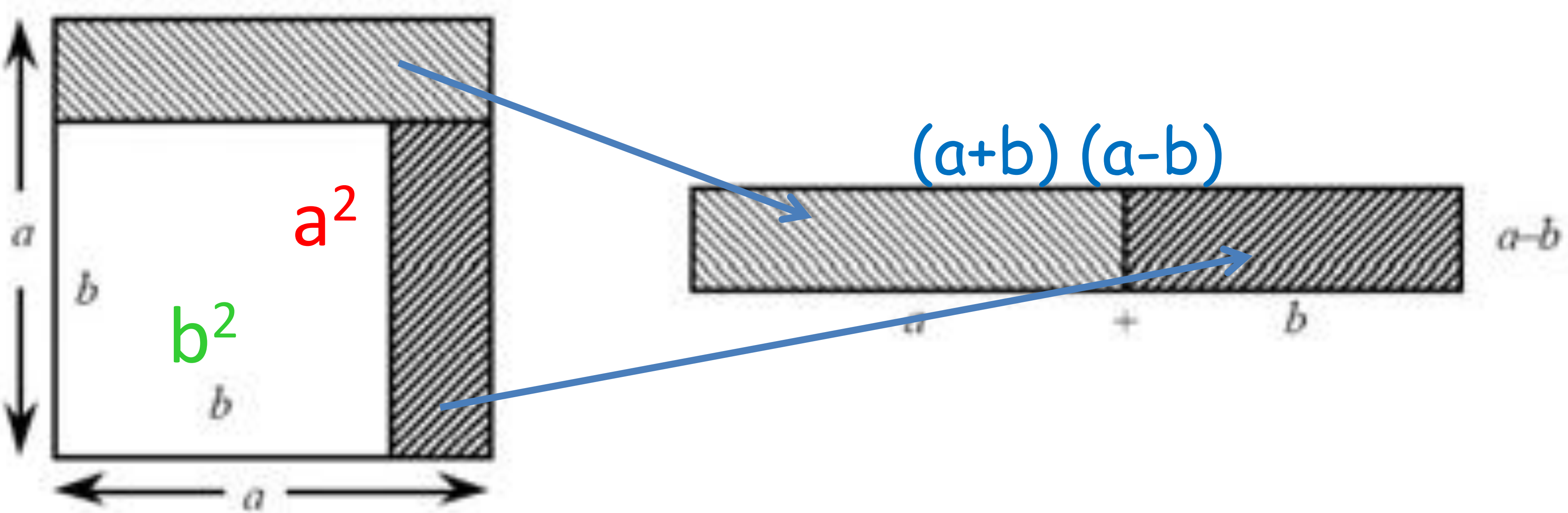
visualizzazione e dimostrazione

Euclide usa la visualizzazione geometrica anche per dimostrare delle proprietà algebriche.

Nello spirito del II libro degli *Elementi,* ad esempio, dimostriamo che

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

[Ad es.: 92–52 = (9+5)(9–5), infatti: 81–25 = 56 = 14·4]



La grande stagione della matematica greca

culmina negli *Elementi* la matematica assume una struttura teorica chiara.

C'è coinvolgimento di conoscenze:

del I ordine (contenuti) [definizioni, teoremi]

del II ordine (regole per rappresentare e dedurre) [convenzioni rappresentative, tecniche di dimostrazione]

del III ordine (in rapporto allo statuto epistemologico) [(ad esempio) rifiuto di usare l'infinito attuale in matematica]

Euclide e l'importanza della dimostrazione

I risultati da dimostrare (ad esempio per assurdo) erano ricavati euristicamente, con tecniche che i Greci non accettavano come vere dimostrazioni.

Nella mentalità eleaticoplatonica, la conoscenza[definizioni, teoremi] non poteva essere ottenuta mediante i sensi: era[convenzioni rappresentative, tecniche di dimostrazione] la dimostrazione che "stabiliva la verità" [(ad esempio) rifiuto di usare l'infinito attuale in matematica].

Euclide e la cultura occidentale

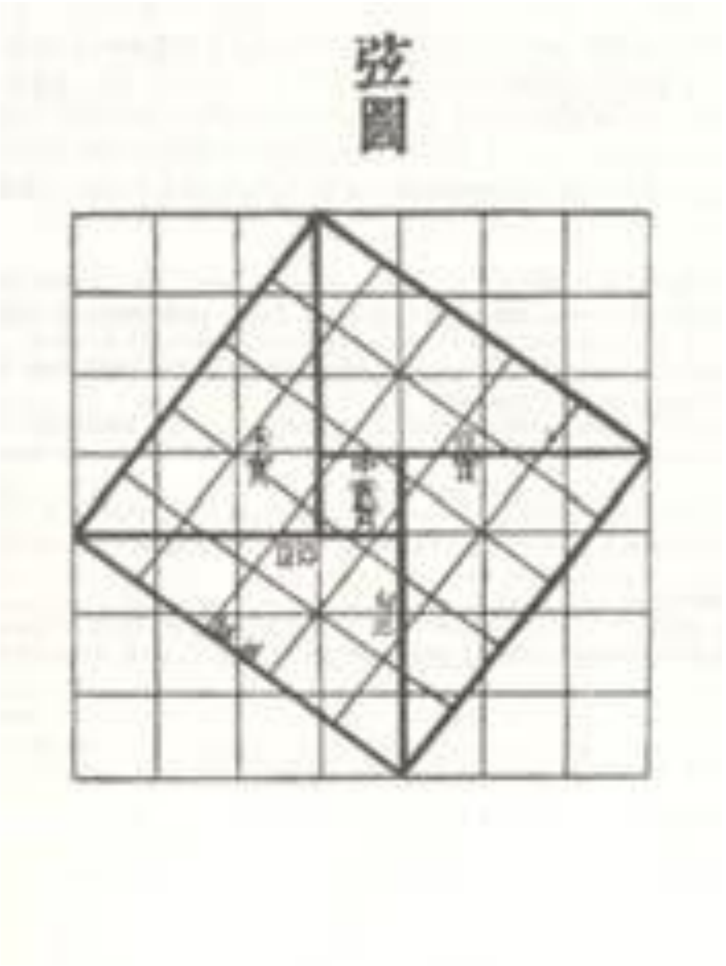
In altre tradizioni matematiche la dimostrazione non era considerata come l'elemento fondamentale.

Ad esempio, in Cina le dimostrazioni non avevano un ruolo primario

Gli antichi matematici cinesi distinguevano le dimostrazioni

bian (per il convincimento) e

xiao (per la comprensione).



Gli *Elementi* tradotti in cinese (1594-1607) da M. Ricci e da Xu Guangqi furono apprezzati solo parzialmente in Cina.

Questo libro fa parte della “nostra” matematica.

L’impostazione ipotetico-deduttiva degli *Elementi* identifica la matematica occidentale

La grande geometria greca: Archimede, Apollonio

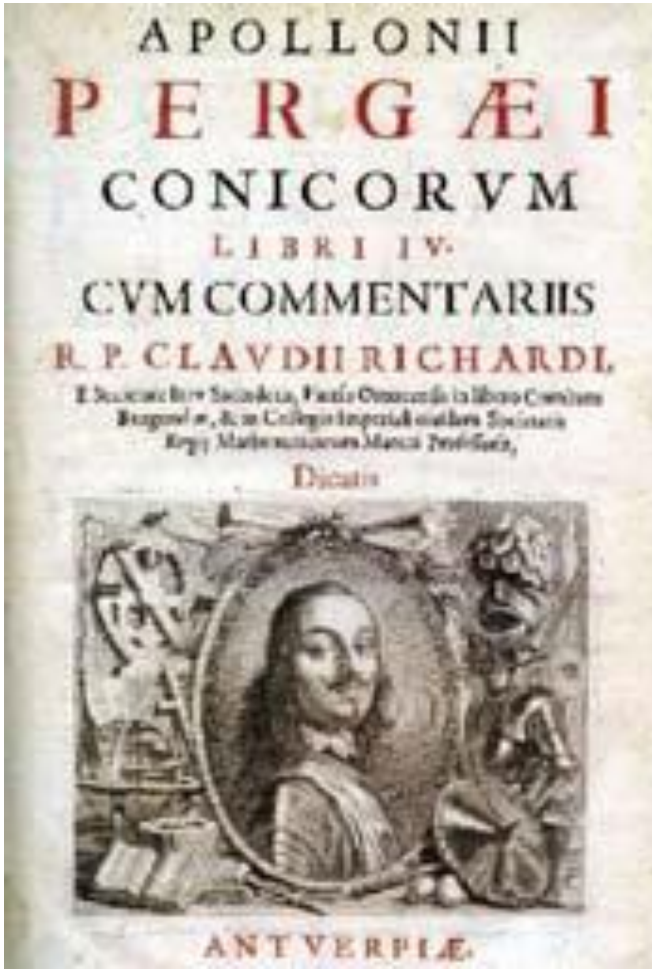
"Archimede, la più grande intelligenza dell'antichità, è moderno sino al midollo. Egli e Newton si sarebbero capiti perfettamente ed è possibile che, se Archimede fosse vissuto tanto da poter seguire un corso universitario di matematica e di fisica, avrebbe perfettamente compreso Einstein, Bohr e Dirac.
Di tutti gli antichi, Archimede è il solo che ragioni con la libertà che si permettono oggi i matematici" (Bell, 1991, p. 18).

"Archimede era dotato di un'elevata intelligenza, di una grande ampiezza d'interessi, sia pratici sia teorici, di un'eccellente abilità meccanica. Nella stima popolare le sue invenzioni oscurarono i suoi risultati matematici, sebbene egli sia considerato, assieme a Newton ed a Gauss, come uno dei tre più grandi matematici di tutti i tempi" (Kline, I, p. 124).

I campi di interesse del Siracusano spaziavano anche nelle direzioni considerate minori nell'ambito dellacultura scientifica ellenica; un'interessante opera archimedea è ad esempio *Arenario*, in cui troviamo esposta la ricerca del numero di granelli di sabbia necessari per riempire l'Universo.

Secondo Archimede, tali granelli di sabbia sarebbero 10^{63}; ma al di là del risultato, corredato da un'ingegnosa dimostrazione, l'*Arenario* merita di essere ricordato perché con esso venne rivalutata l'importanza del calcolo pratico, da secoli dominato dalla teoria dei numeri e relegato ad attività servile.

Archimede, Apollonio



Pare che Apollonio di Perga (262 ?-190 ? a.C.), matematico e astronomo,fosse un emulo di Archimede (studiò ad Alessandria sotto la guida degli allievi di Euclide).

La maggior parte delle opere di Apollonio sono perdute: ci restano parti dei trattati *Sezione di un rapporto* e *Coniche*

Il grande capolavoro di Apollonio è il trattato sulle sezioni coniche, originariamente in otto libri, comprendente 487proposizioni.

Come fece Euclide per la geometria e l'aritmetica elementare, egli organizzò la materia, unificando e completando opere e teorie precedenti.

Quale matematica nella Roma antica?

È necessario considerare il contesto socio-culturale del periodo in cui certi saggi sono stati scritti!

Storia. 1. La Matematica come scienza razionale
2. Matematiche preelleniche
3. Sviluppo delle Matematiche presso i Greci
4. Le opere classiche
5. Sviluppi ulteriori e decadenza nel periodo ellenistico
6. Trasmissione attraverso i Romani
7. Alto Medioevo
etc.

Sommario della voce *Matematica* redatta per l'edizione 1934 dell'*Enciclopedia Italiana* (volume XXII, p. 547) da F. Enriques (1871-1946, Direttore della sezione Matematica dell'*Enciclopedia* dal 1925 al 1937, allontanato dall'insegnamento universitario nel 1938 in seguito alle leggi razziali).

Si parla di "Trasmissione attraverso i Romani": dunque ai Romani va riconosciuto un ruolo attivo e in qualche modo positivo nei confronti della matematica?

Scrive però onestamente Enriques, con riferimento ad una fase di decadenza nel periodo ellenistico:

"Gli ultimi secoli videro una decadenza dell'intelletto matematico e anche un ritorno alla mistica dei numeri, massimamente sviluppata dai neopitagorici e dai neoplatonici (…).

A queste circostanze verosimilmente si deve che il nome generico *matematici* venga quindi innanzi a designare una classe di cabalisti, indovini o magi, che è fatta oggetto di dispregio, di terrore e di persecuzioni" (volume XXII, p. 548).

"Nemo Chrystianorum presbyter non mathematicus" (Volpisco, *Saturnali*)

"La nuova stirpe dominatrice si mostrò del tutto priva dell'attitudine di coltivare le discipline che nessuna palese relazione manifestavano con l'arte della guerra e del governare" (G. Loria, nel capitolo intitolato "SPQR").

Lucio G. M. Columella da Cadice scrisse (62 d.C.) *De Re Rustica*, con elementi di geometria pratica.

Formule approssimate per il calcolo di aree:
1. per trovare l'area di un triangolo equilatero di lato l: *Area* = $l^2 \cdot 13/30$ (con ciò si approssima la radice di 3 con 26/15)
2. per trovare l'area di un cerchio di diametro d : *Area* = $d^2 \cdot 11/14$ (con ciò si approssima π con 22/7)

In entrambi i casi l'approssimazione è per eccesso:

caso 1: (val. approssimato)/(val. esatto) = 1.000740…

caso 2: (val. approssimato)/(val. esatto) = 1.000402…

Columella "al pari degli antichi Egiziani non [sempre] insegna regole generali, ma lascia al lettore i desumerle dalle applicazioni" (G. Loria).

Inoltre: si tratta di approssimazioni valide?

Forse, ma due secoli e mezzo prima di Columella, un greco-siciliano che perse la vita proprio a causa degli invasori romani aveva messo a punto una tecnica per ottenere approssimazioni per difetto e per eccesso: la considerazione di poligoni regolari inscritti e circoscritti.

Gli interessi di Archimede non erano solo pratici!

Roma e la Grecia

753 a.C. fondazione di Roma
510 a.C. Repubblica
212 a.C. conquista di Siracusa
146 a.C. conquista della Grecia
64 a.C. conquista della Mesopotamia
30 a.C. conquista dell'Egitto
476 caduta dell'impero di occidente S. Boezio (480-524) l'unico matematico "romano
550 a.C. Talete, Pitagora
360 a.C. Eudosso
300 a.C. Euclide
225 a.C. Apollonio, Eratostene
212 a.C. Archimede
140 a.C. Ipparco
100 Nicomaco, 150 Tolomeo
75 Erone, 250 Diofanto
320 Pappo, 390 Teone

Il ruolo della "matematica romana"

É. Montucla (titolo: *Dall'Era Cristiana alla caduta dell'Impero greco*): "Come le Lettere, anche le Scienze hanno i loro periodi di prosperità e di decadenza" (1758, I, p. 284).

C.B. Boyer (titolo: *Rinascita e declino della Matematica greca*): "Sia durante la Repubblica che nei giorni dell'Impero, i Romani ebbero scarsa inclinazione per l'indagine speculativa o logica" (1980, p. 208, ed. orig. 1968).

M. Kline (titolo: *La scomparsa del mondo greco*): "La Matematica romana merita a malapena di essere menzionata (...) Non vi fu un solo matematico romano" (1991, I, pp. 208-209, ed. orig. 1972).

D.J. Struik (titolo: *Il sorgere dell'impero romano e il declino della Matematica greca*): "L'intera struttura economica dell'impero romano rimaneva basata sull'agricoltura. Il diffondersi di un'economia basata sulla schiavitù, in tale società, fu fatale a tutto il lavoro scientifico originale.

Finché l'impero romano mostrò qualche segno di stabilità, la scienza orientale continuò a fiorire sotto forma di una curiosa mistura di elementi ellenistici e orientali. Benché l'originalità e gli stimoli andassero gradualmente scomparendo, la *pax romana*, per secoli, consentì la continuazione indisturbata della speculazione" (1981, p. 77, ed. orig. 1948).

F. Enriques e G. Loria sono stati indotti (dal contesto politico e culturale) a presentare titoli ambigui: "Trasmissione attraverso i Romani" "S.P.Q.R." (un intero capitolo dedicato a… nulla!)

Solo nel testo hanno riconosciuto la realtà storica sviluppatasi in un contesto intrinsecamente nonmatematico.

"Graecia capta ferum victorem cepit et artes intulit agresti Latio" (Orazio, *Epistole*, 2, 1, 156-157).

Per le arti, forse, i Romani furono discepoli dei Greci: ma non certo per quanto riguarda la matematica!