

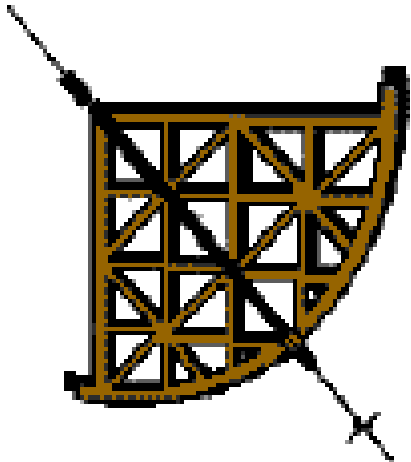
# Introduzione alla Cosmologia Fisica Lezione 2

**Cenni sulla geometria dello spazio-tempo, i paradossi della relativita'**

Giorgio G.C. Palumbo

Università degli Studi di Bologna

Dipartimento di Astronomia

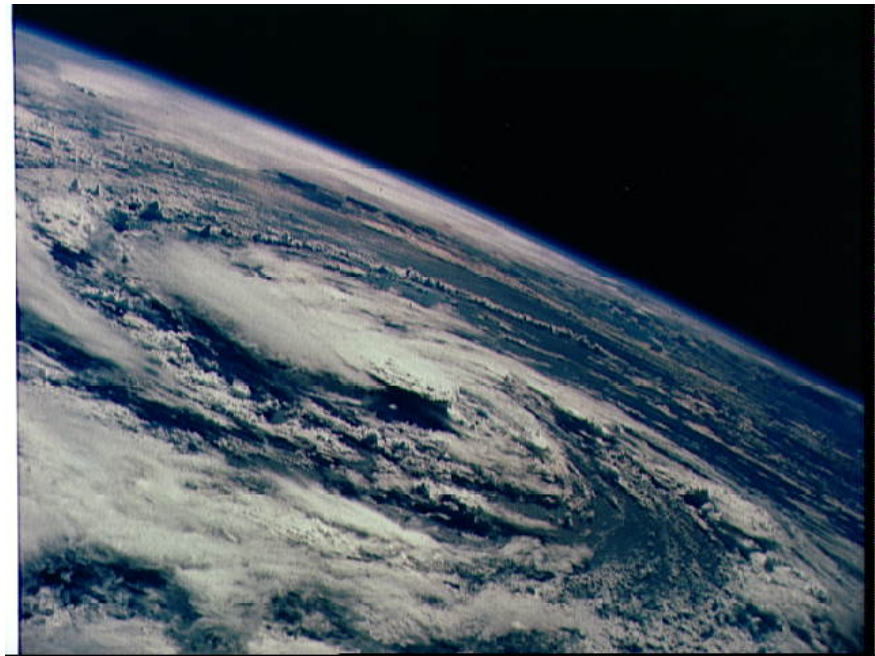


# Cos'è un evento ?

- Quando succede  $\Rightarrow$  tempo  $t$
  - Dove succede  $\Rightarrow$  posizione  $(x,y,z)$
  - Quale sistema di riferimento
- $\Rightarrow$  coordinate  $(t,x,y,z)$  misurato rispetto ad un particolare osservatore a  $(0,0,0,0)$
- $\Rightarrow$  Sistema di riferimento

# Sistema di riferimento inerziale

- Un **sistema inerziale** è un sistema di riferimento a riposo o in moto costante (i.e. velocità costante, direzione costante).
- Sistema non-inerziale  $\Rightarrow$  forze fittizie
  - Forze centrifughe
  - Forze di Coriolis



# Le 3 leggi di Newton

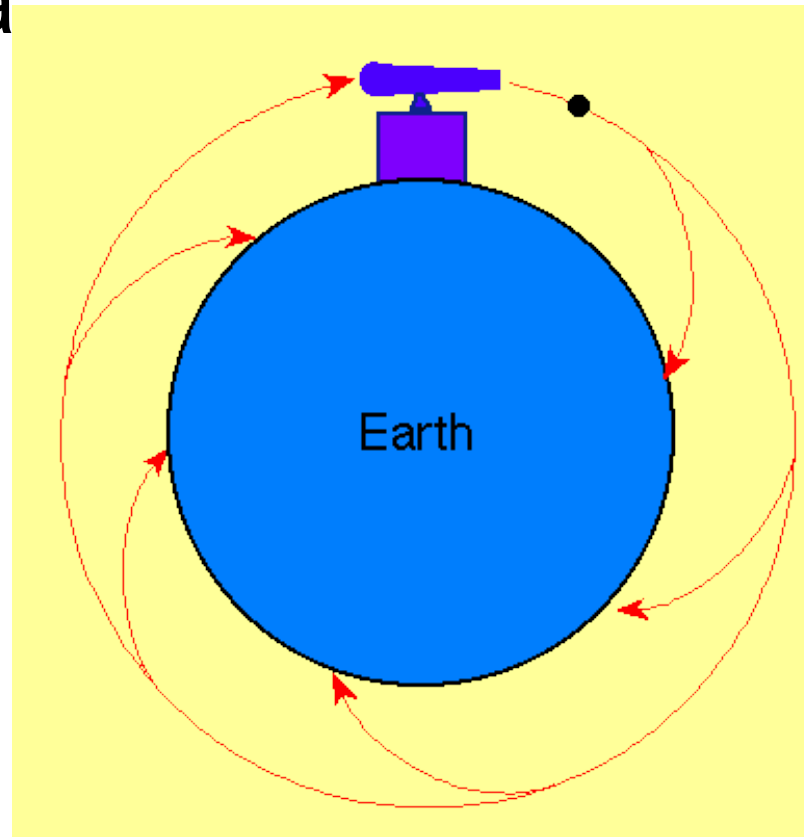
**Prima legge di Newton:** Un corpo in quiete o in moto uniforme rimarrà fermo o in moto uniforme, a meno che una forza agisca su di esso.

**Seconda legge di Newton:** L'accelerazione di un oggetto è uguale alla forza applicata, diviso per la sua massa.

**Terza legge di Newton:** Per ogni azione, c'è una reazione uguale ed opposta.

# Storia di una mela

- Osservazione 1: La Luna orbita la Terra su un'orbita quasi circolare.  $\Rightarrow$  La Luna è costantemente accelerata
- Cade continuamente verso la Terra.

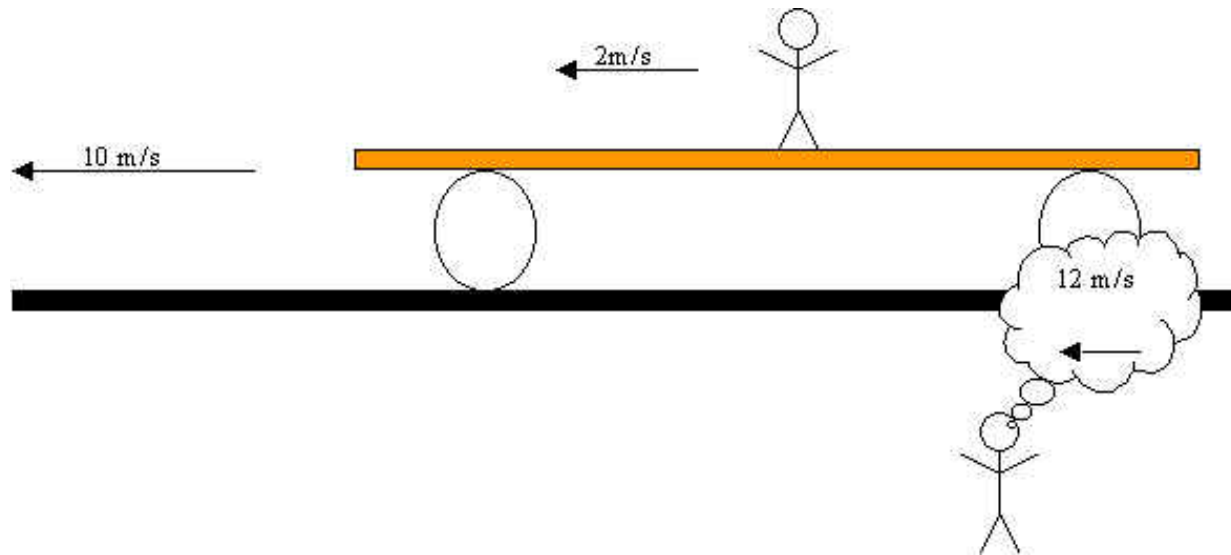


# Alcune definizioni ...

- **Osservatore inerziale:** Un **osservatore inerziale** è un osservatore il cui sistema di riferimento è inerziale
- **Invarianza:** Una quantità si dice **invariante** se tutti gli osservatori inerziali misurandola ottengono il medesimo risultato
- **Relatività:** Una quantità si dice **relativa** se diversi osservatori inerziali misurandola ottengono risultati diversi.

# Esempi

- **invarianti:** tempo, massa, accelerazione, forza
- **relativi:** velocità, posizione



⇒ Relatività Galileiana

# Relatività Galileiana

- Non esiste sistema di riferimento assoluto. Le leggi di Newton funzionano in ogni sistema inerziale (non accelerato)
- **Conclusioni:** non si può dimostrare se un laboratorio isolato sia in moto o fermo.

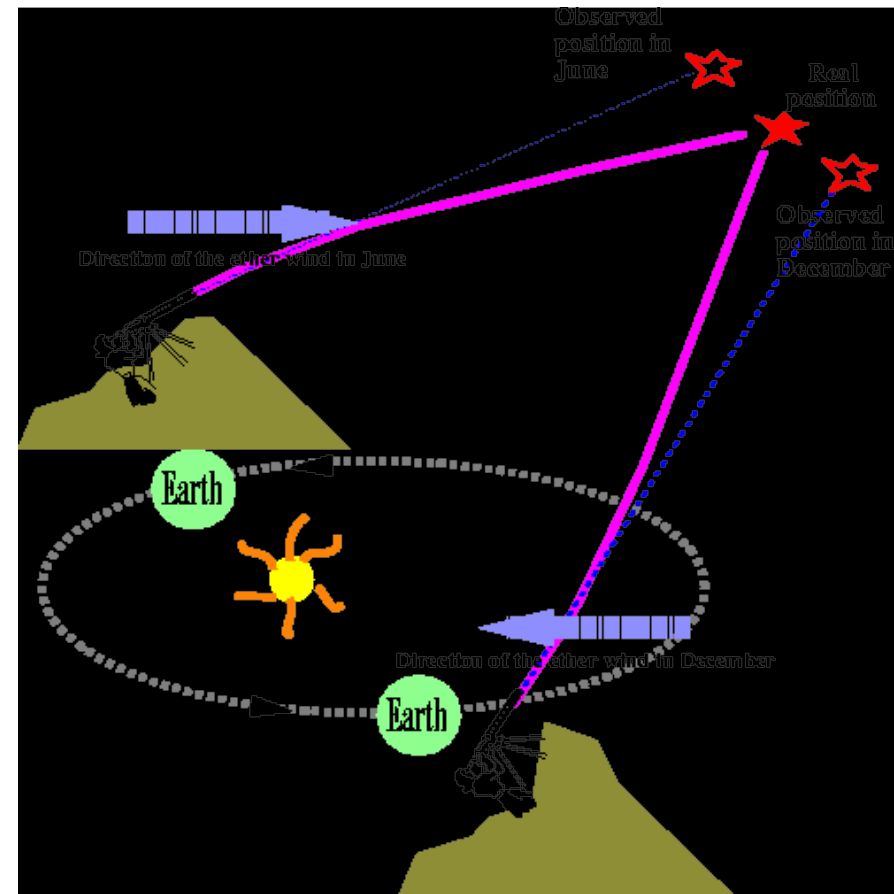


# Elettromagnetismo

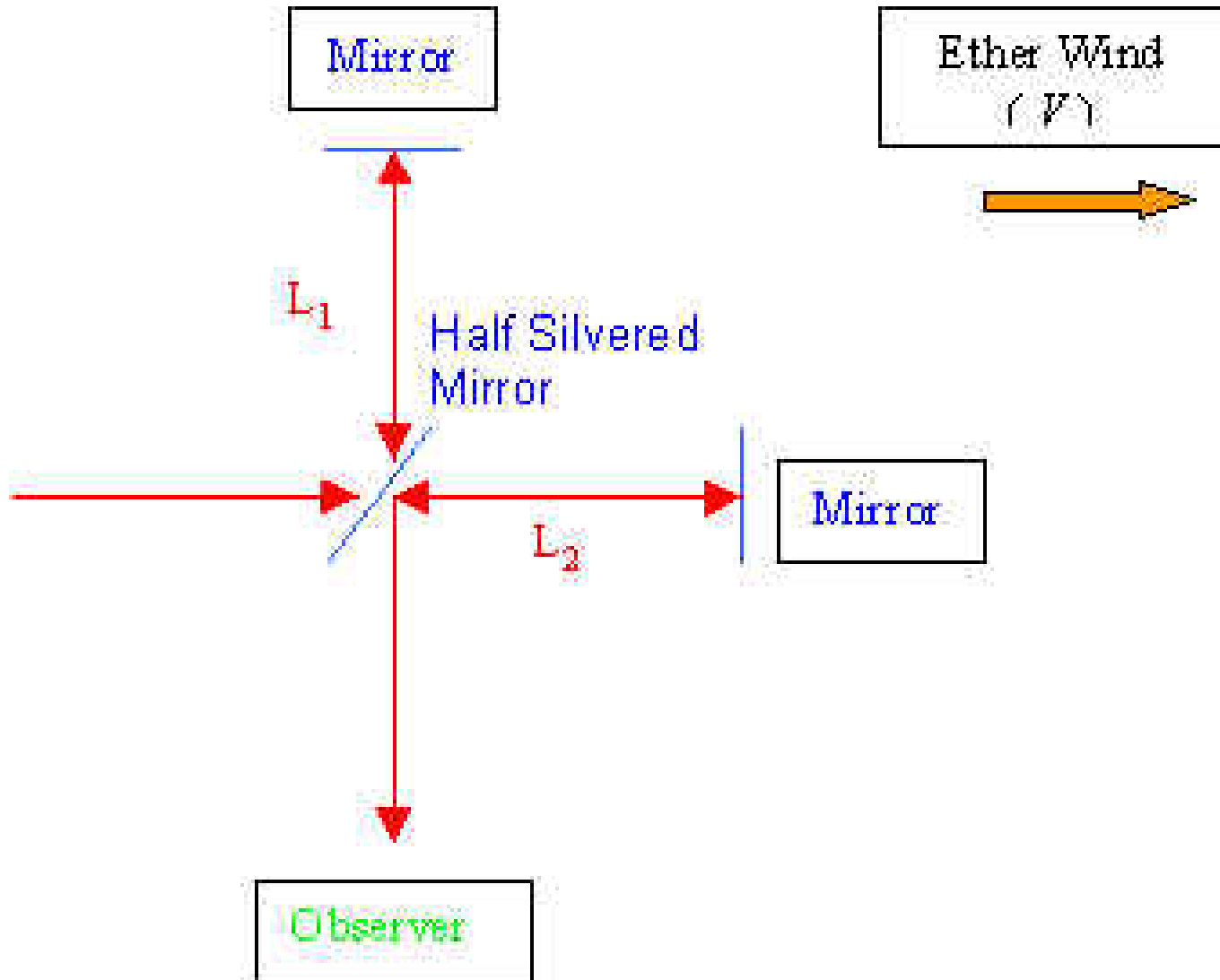
- 1860s: James Clerk Maxwell: elettricità e magnetismo: sono manifestazioni della sola forza elettromagnetica
- Predice le onde elettromagnetiche (em)
  - Si muovono nel vuoto alla velocità  $c$
  - esempi: luce, onde radio
- Problema:
  - $c$  è la stessa in tutti i sistemi inerziali
  - $c$  è invariante non relativa
  - Qual'è il mezzo che trasporta le onde em ?

# L'Etere ??

- **Idea:** onde em si propagano attraverso l'**etere luminifero** (come il suono nell'aria)  
⇒ sistema di riferimento dell'etere è un sistema di riferimento privilegiato
- Possiamo verificarne l'esistenza?
- Sicuro !



# L'esperimento di Michelson-Morley



# Resultati

- **Predizione:**

- Solo nel sistema di riferimento dell'etere, dovrebbe essere

- $c = 299\,792\,458 \text{ m/sec}$**

- in altri sistemi di riferimento la velocità dovrebbe essere diversa e.g. di 30 km/sec, la velocità della Terra intorno al Sole

- **Osservazioni:**

- La velocità della luce è uguale a meno di 5 km/sec  $\Rightarrow$  **l'etere non esiste !!!**

# Dalla Fisica del 19esimo secolo

- L'esperimento di Michelson-Morley
- La radiazione dei corpi caldi (radiazione di Black Body)

Da questo nascono

- La teoria della relatività
- La meccanica quantistica

# La “strana” proposta di FitzGerald

- Gli oggetti in moto nell'etere a velocità  $\mathbf{v}$  si contraggono secondo la

$$L(v) = L_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$\nabla \Rightarrow$  strano no ?!

# La “nuova” relatività di Einstein

- Galileo:

- Le leggi della meccanica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali
- Il tempo e lo spazio sono gli stessi in tutti i sistemi inerziali

- Einstein:

- Le leggi della Fisica sono le stesse in tutti i sistemi inerziali
- La velocità della luce nel vuoto è la stessa in tutti i sistemi inerziali

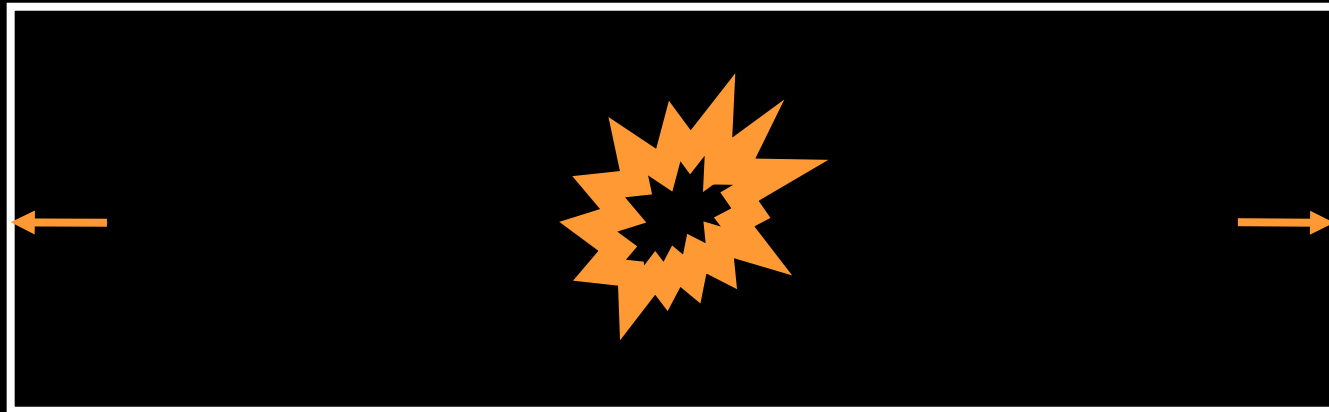
# Conseguenze 1: simultaneità

- Considera un osservatore all'interno di una astronave in moto con  $v$  simile a  $c$ :

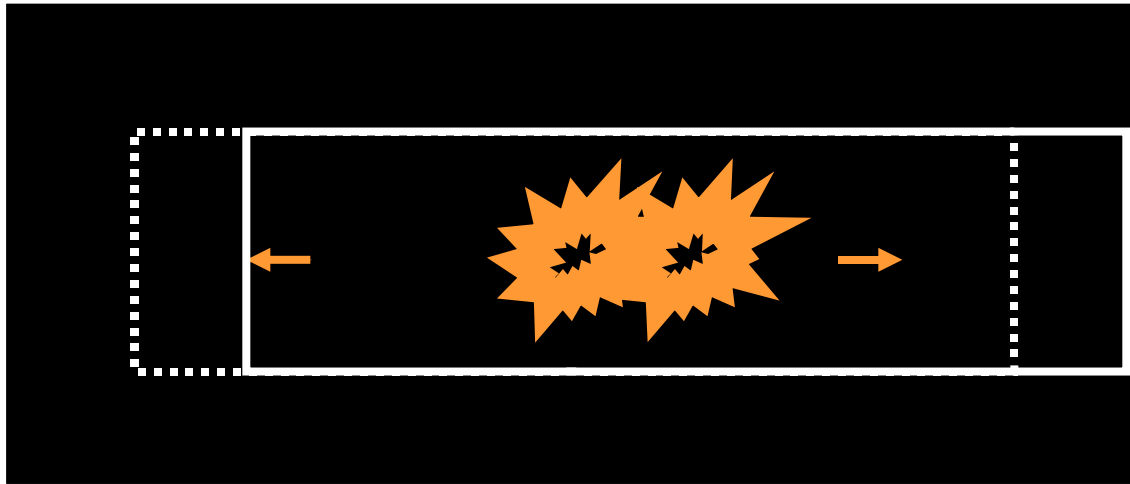




⇒ per un osservatore all'interno dell'astronave,  
la luce colpisce le pareti allo stesso tempo



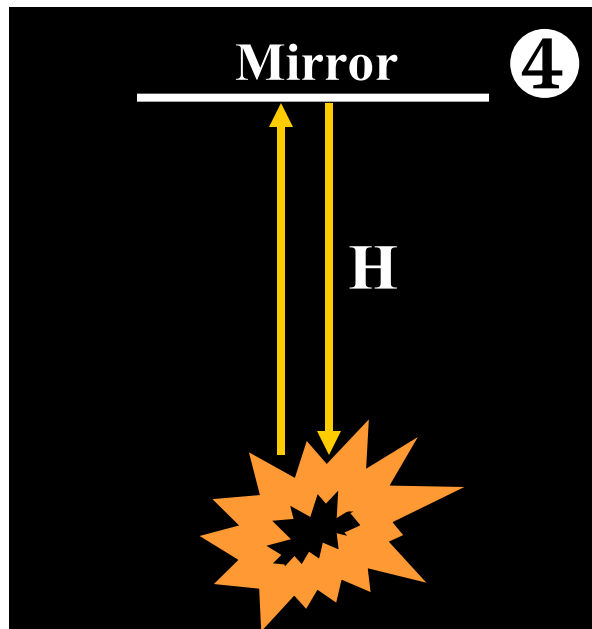
- Per un osservatore esterno ( velocità relativa all'astronave  $v$ ):



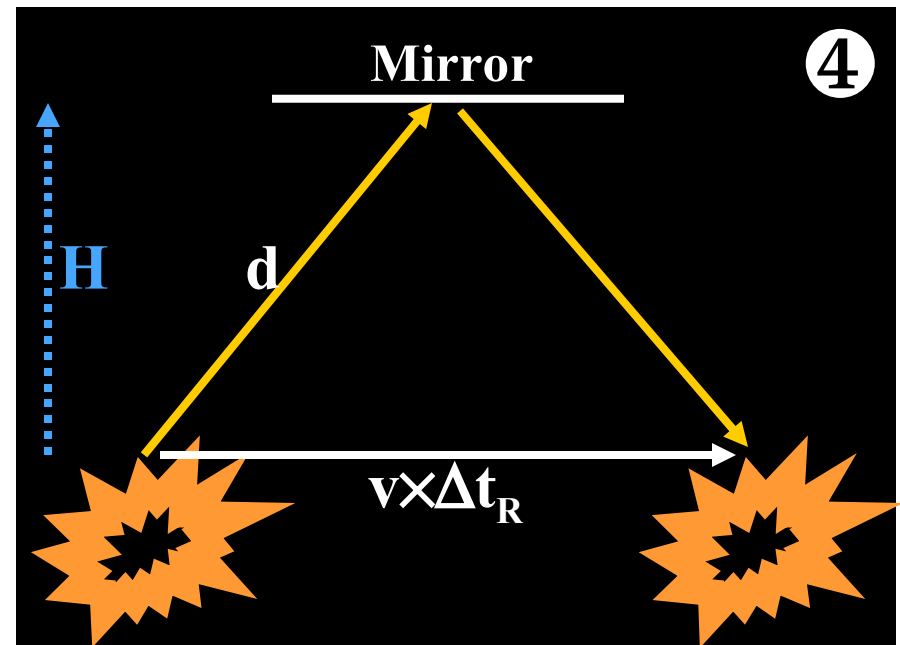
- - ⇒ la luce incontra le pareti esterne in tempi diversi
  - ⇒ **La simultaneità è relativa**

# Conseguenza 2: dilatazione del tempo

- Osservatore comovente con l'astronave



- Osservatore esterno



⇒ Orologi in moto devono andare più piano !!

- Tempo misurato dal passeggero nell'astronave:

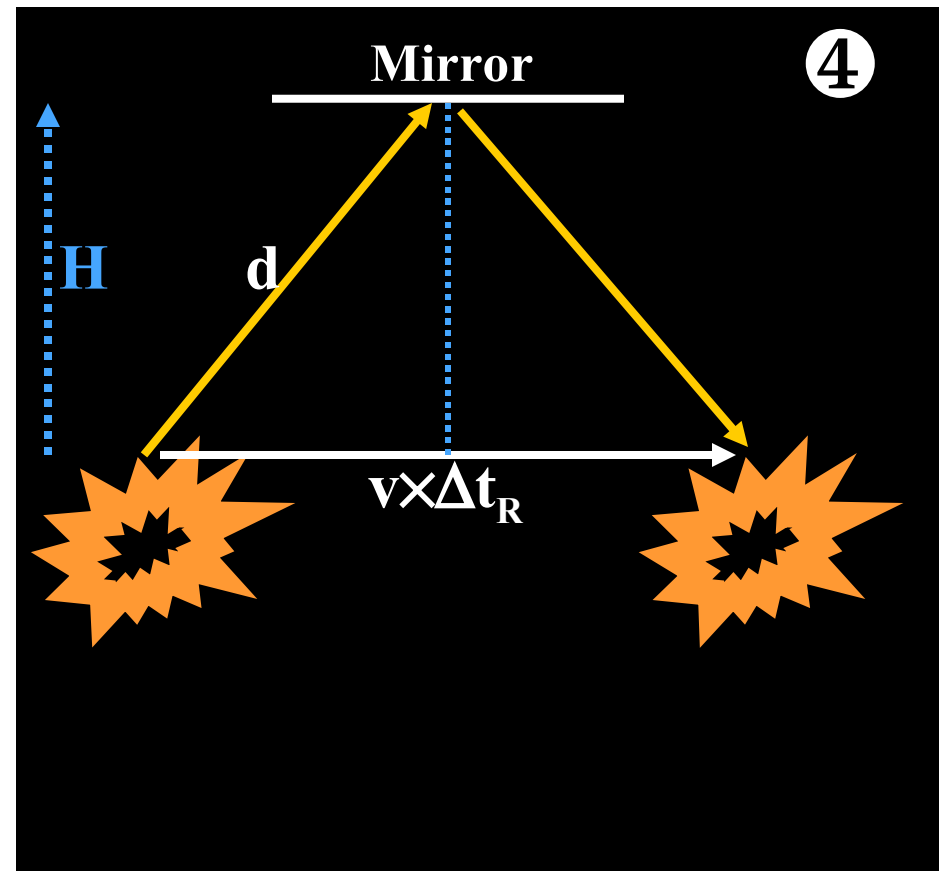
$$\Delta t_p = 2H/c$$

- Distanza percorsa dalla luce nel sistema in quiete:

$$d^2 = H^2 + (0.5v \times \Delta t_R)^2$$

- relazione tra  $\Delta t_p$  e  $\Delta t_R$ :

$$\Delta t_R = \frac{\Delta t_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$



# Conseguenza 3: contrazione delle lunghezze

- Considera la distanza tra 2 stazioni spaziali, misurata usando il tempo di spostamento di una stazione spaziale in moto a velocità  $\mathbf{v}$ 
  - Osservatore in una stazione: misura moto con velocità  $\mathbf{v}$ , tempo impiegato  $\Delta t_R$   
 $\Rightarrow$  distanza percorsa:  $d = \mathbf{v} \times \Delta t_R$
  - Osservatore nell'altra stazione: misura moto con velocità  $\mathbf{v}$ , tempo impiegato  $\Delta t_P$   
 $\Rightarrow$  distanza:

$$d_P = v \times \Delta t_P = d_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

# Relatività

- Galileo:
    - Le leggi della meccanica, lo spazio ed il tempo sono invarianti rispetto ai sistemi di riferimento inerziali
  - Einstein:
    - Le leggi della Fisica sono invarianti rispetto ai sistemi di riferimento inerziali, la velocità della luce  $c$  è costante in tutti i sistemi
- ⇒ Intervalli di tempo e distanze sono relativi

# Conseguenze

- **Simultaneità:**

Se due eventi sono simultanei o meno dipende dalla velocità con cui si muovono gli osservatori rispetto agli eventi

- **Dilatazione dei tempi**

$$\Delta t_R = \frac{\Delta t_P}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- **Contrazione delle lunghezze**

$$d_P = d_R \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

# Fattore di aumento

- $$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- ## Dilatazione dei tempi:

- $- v=0.1c \Rightarrow \Gamma = 1.005 \Rightarrow 0.5\% \text{ boost } \Delta t_R = \Gamma \times \Delta t_P$

- ## Contrazione delle lunghezze:

- $- v=0.5c \Rightarrow \Gamma = 1.155 \Rightarrow 15.5\% \text{ boost } d_P = d_R / \Gamma$

- $- v = 0.999c \Rightarrow \Gamma = 22.37$



# $c + c = c$ ? Si, quasi ...

- **D:** Come si sommano le velocità ?

**R:** applicando le trasformazioni di Lorentz:

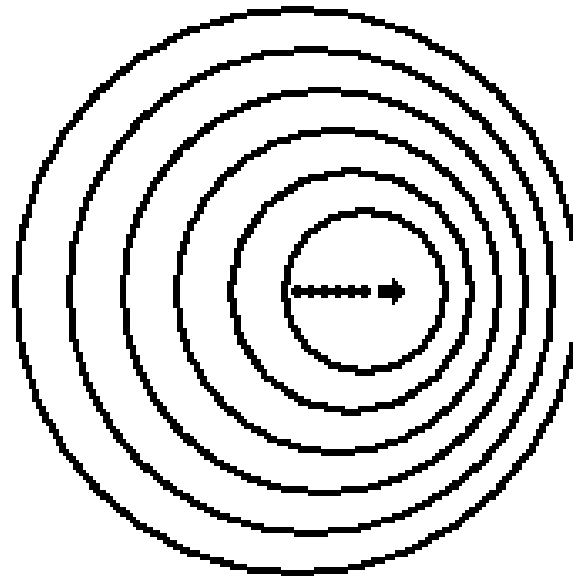
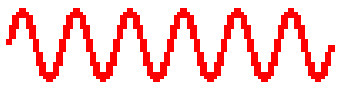
$$v_{tot} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 \times v_2}{c^2}}$$

- **Esempio:** navetta ( $v_2=0.5c$ ) da Enterprise,  
a  $v_1=0.5c$

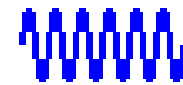
osservatore esterno:  $v_{torpedo} = 0.8c$

# Effetto Doppler (per la luce)

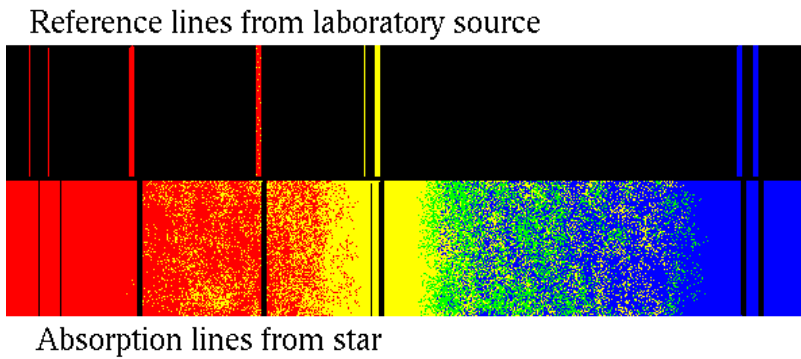
OBJECT RECEDING:  
LONG RED WAVES



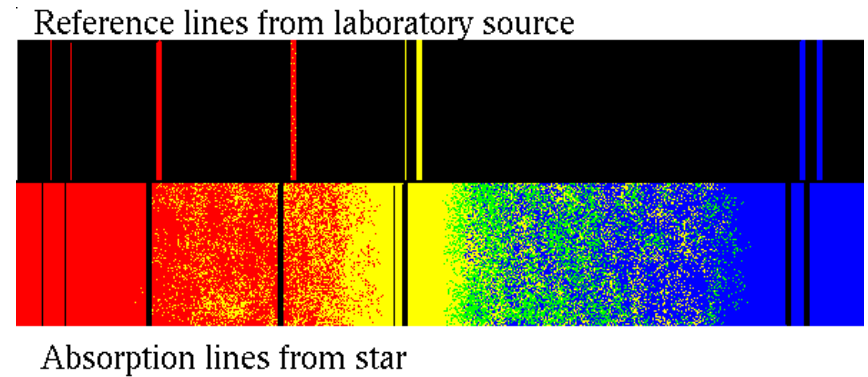
OBJECT APPROACHING:  
SHORT BLUE WAVES



# Effetto Doppler



**blue shift**



**red shift**

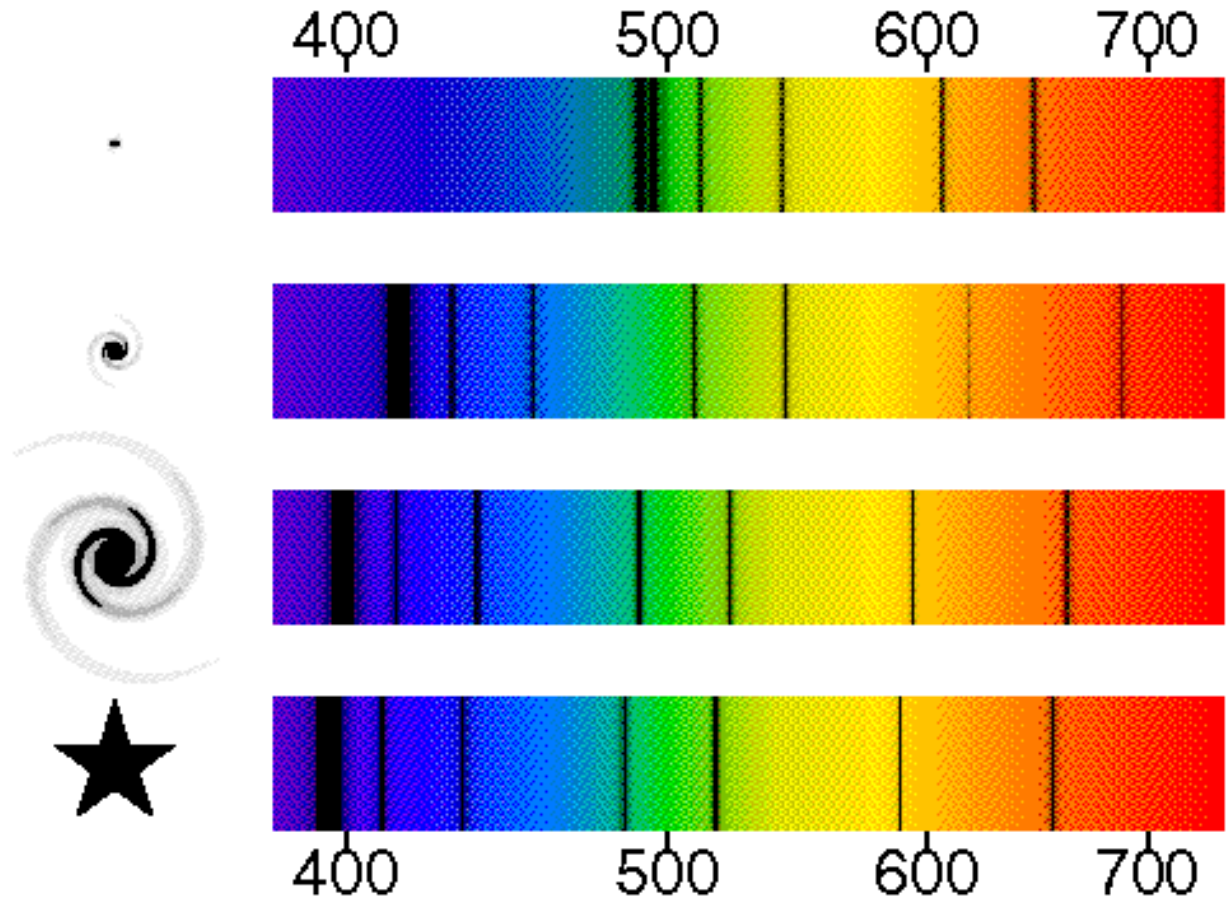
redshift:

$$1+z = \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}}$$

$z=0$ : fermo

$z=2$ :  $v=0.8c$

$z=\infty$ :  $v=c$



# Energia

- Capacità di fare lavoro
- L'energia totale è conservata, cioè si trasforma
- Esempi:
- Freni moto (energia cinetica) in calore
- Corpi in caduta: energia gravitazionale in energia cinetica

# Energia

- Newton:

- Energia cinetica:  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2$

- $v=0 \Rightarrow E_{\text{kin}} = 0$

- Einstein:

- $E = \Gamma m_0 c^2$

- $v=0 \Rightarrow E = m_0 c^2$  “energia a riposo”

- $E_{\text{kin}} = (\Gamma - 1) m_0 c^2$

- Esempio:

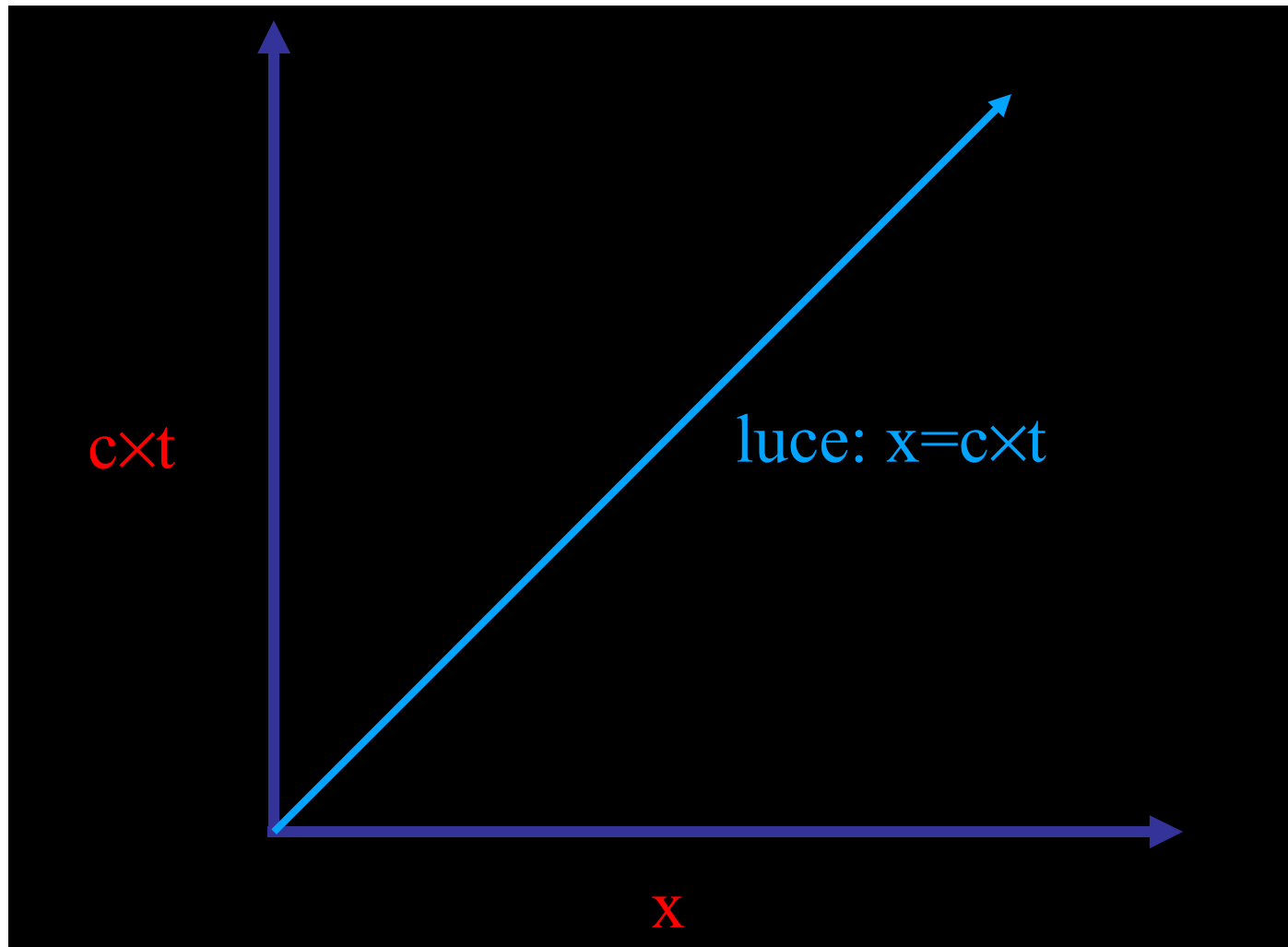
energia necessaria per accelerare 1kg di massa a  $v = 0.87c \Rightarrow$  equivalente a **20**

**megatoni di TNT**

# Spaziotempo di Minkowski

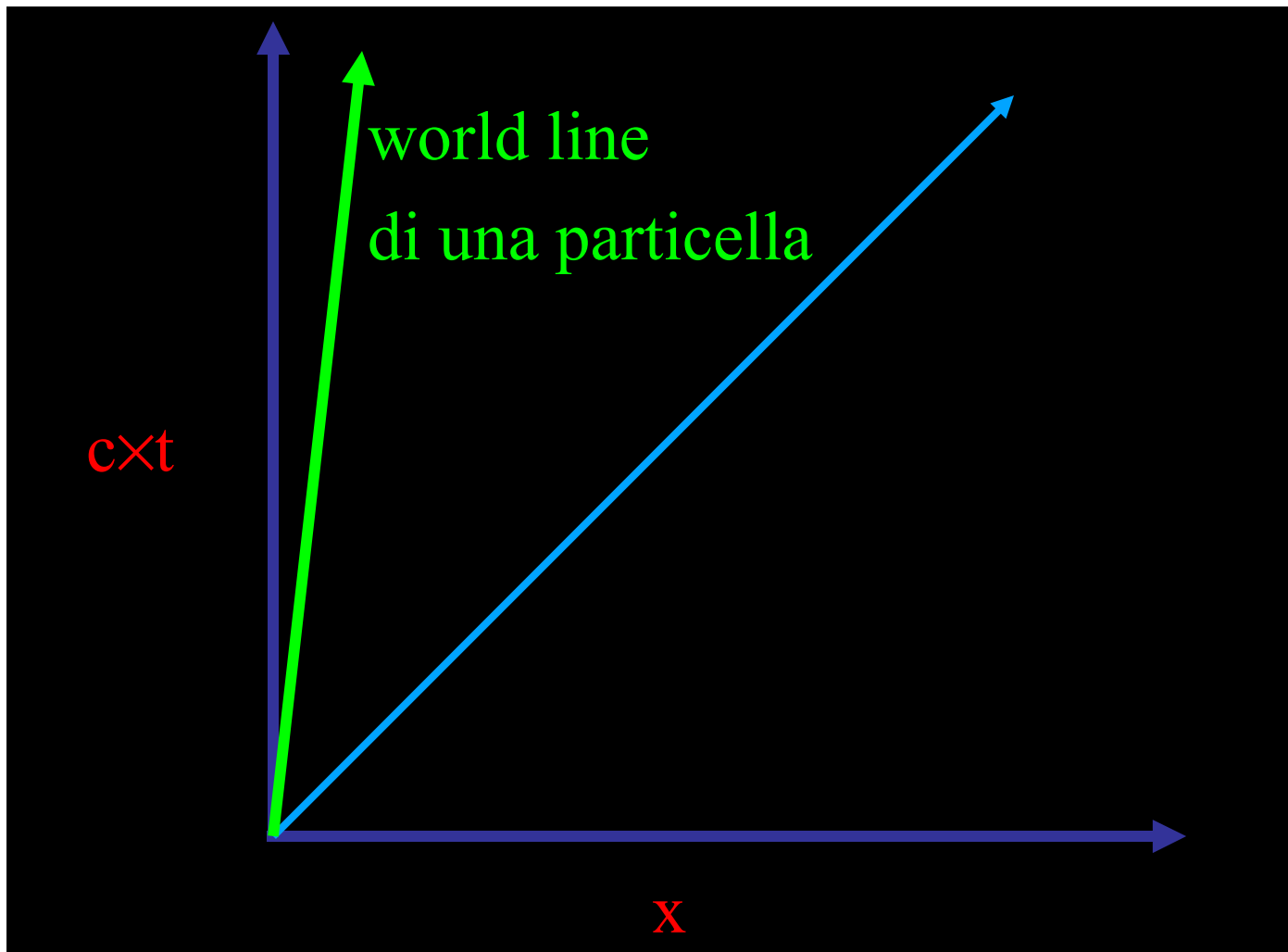
- Gli intervalli di tempo, lunghezze, e simultaneità sono relative e dipendono dalla velocità relativa dell'osservatore.
- La velocità connette tempo e spazio
- Smettiamo di parlare di spazio e tempo, piuttosto parliamo di **spaziotempo**
- **Lo spaziotempo** è 4 dimensionale, 3 spaziali + 1 temporale  
**ma spazio e tempo sono veramente la stessa cosa ?**

# Diagramma di Minkowski

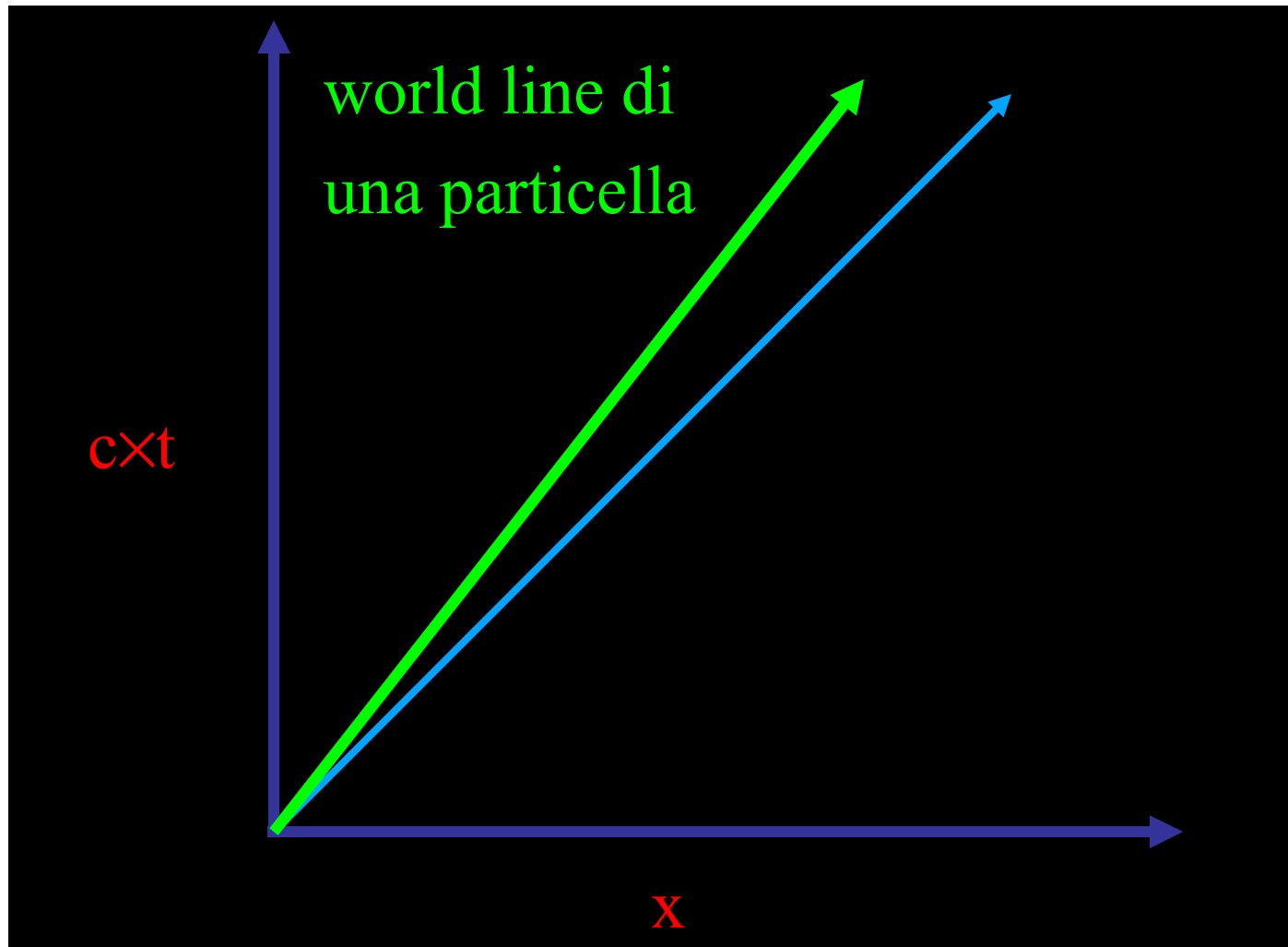




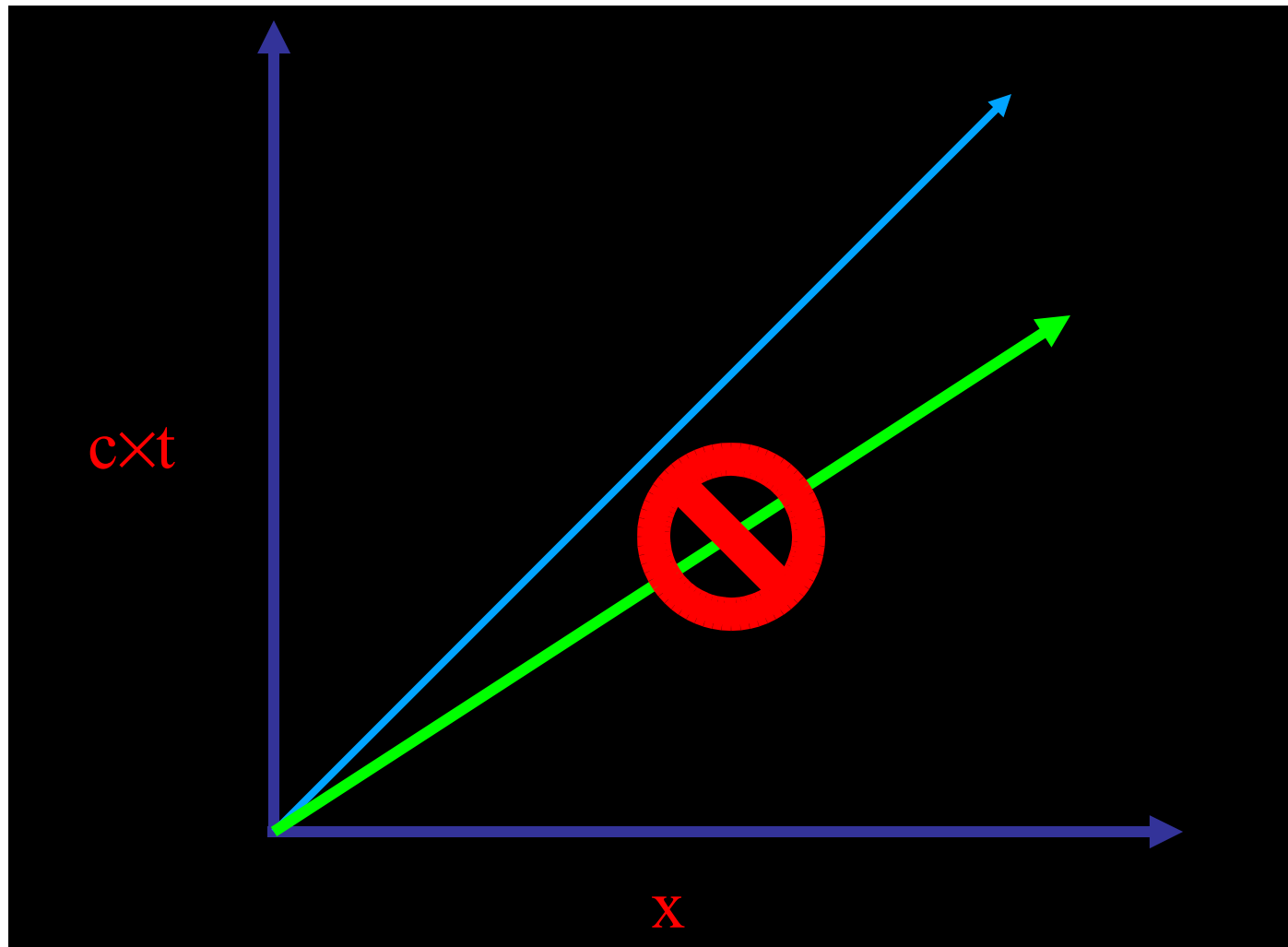
# World lines — si muovono lentamente



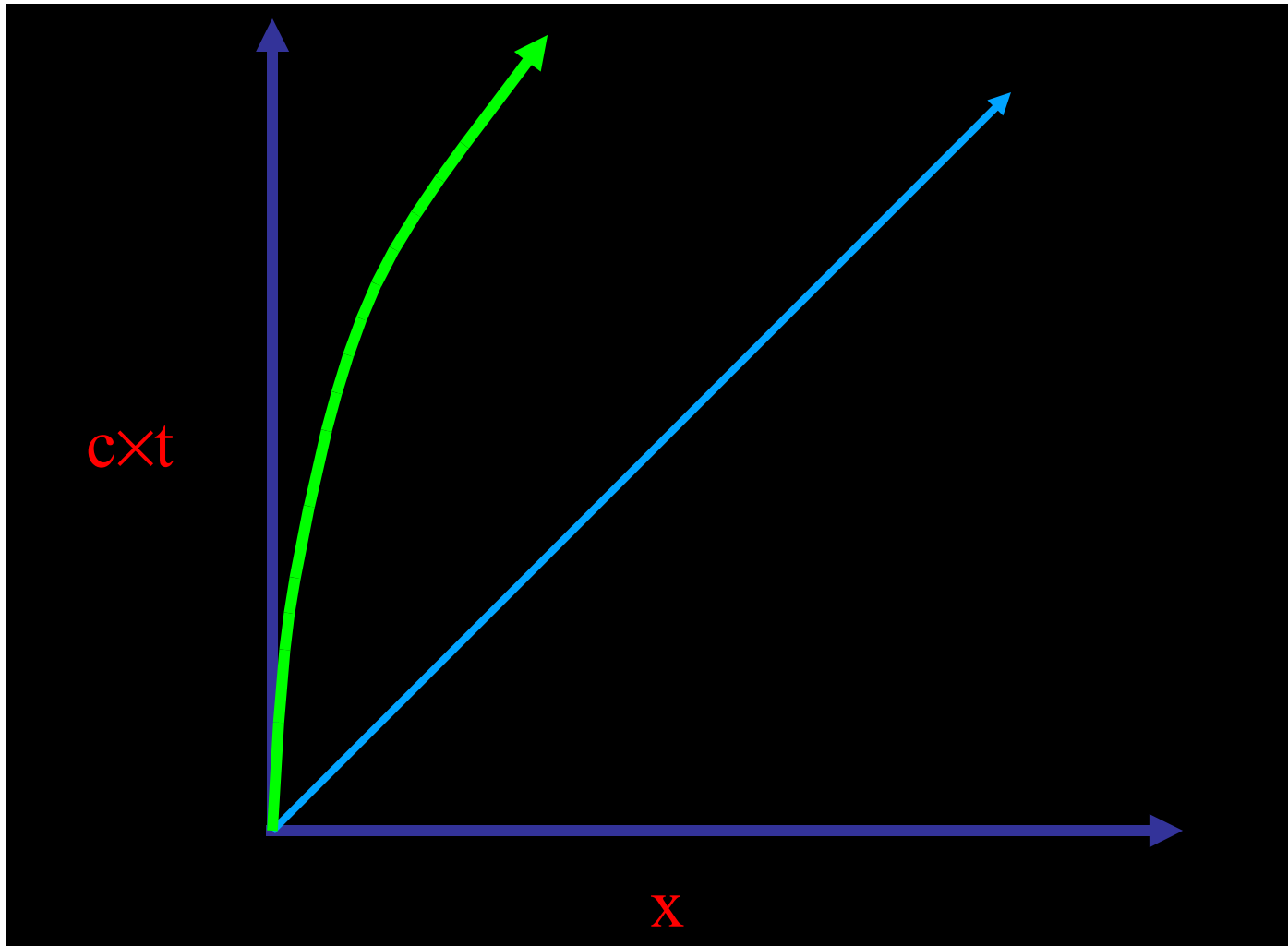
# World lines — si muovono velocemente



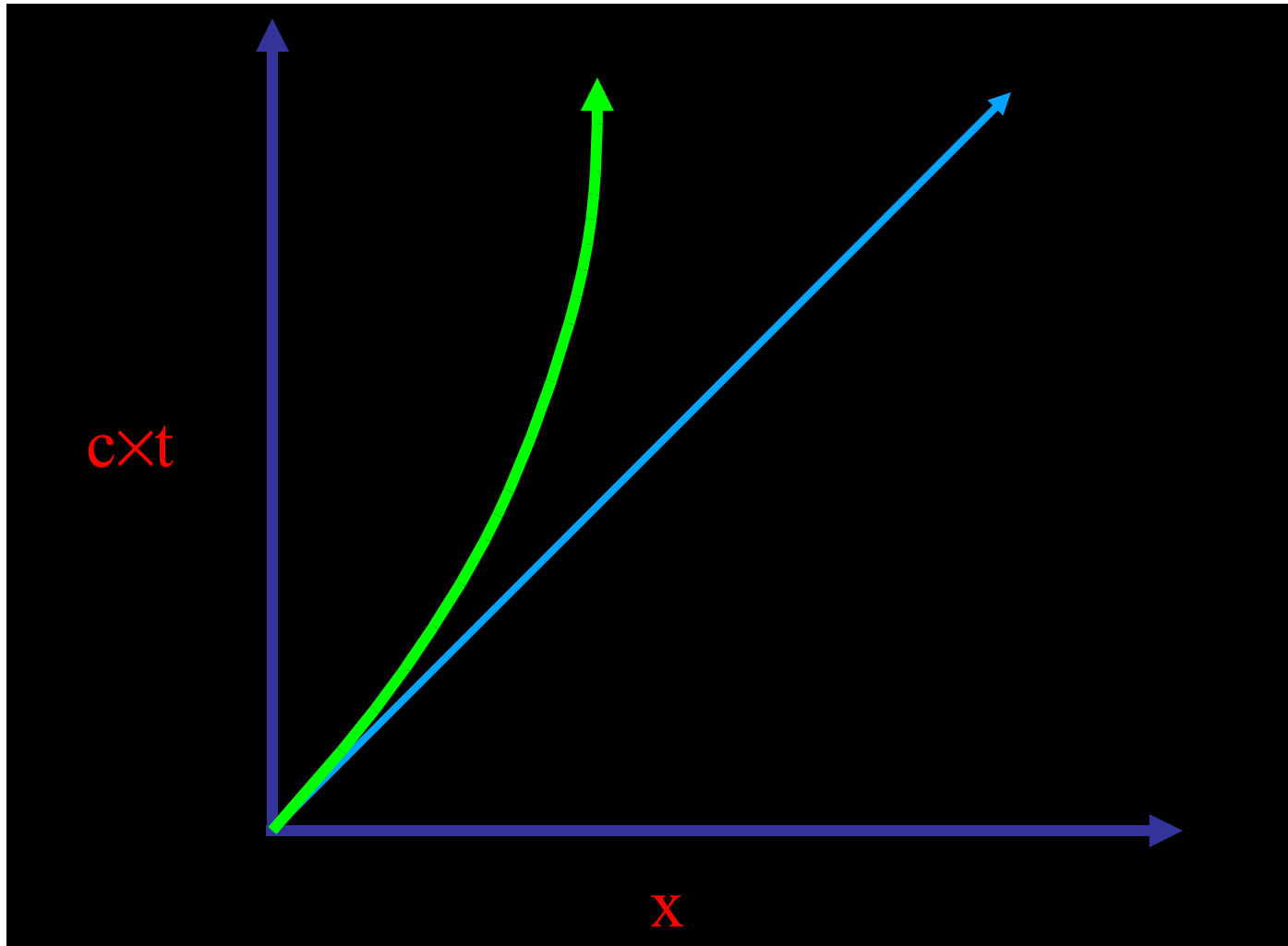
# Più veloci della luce ?



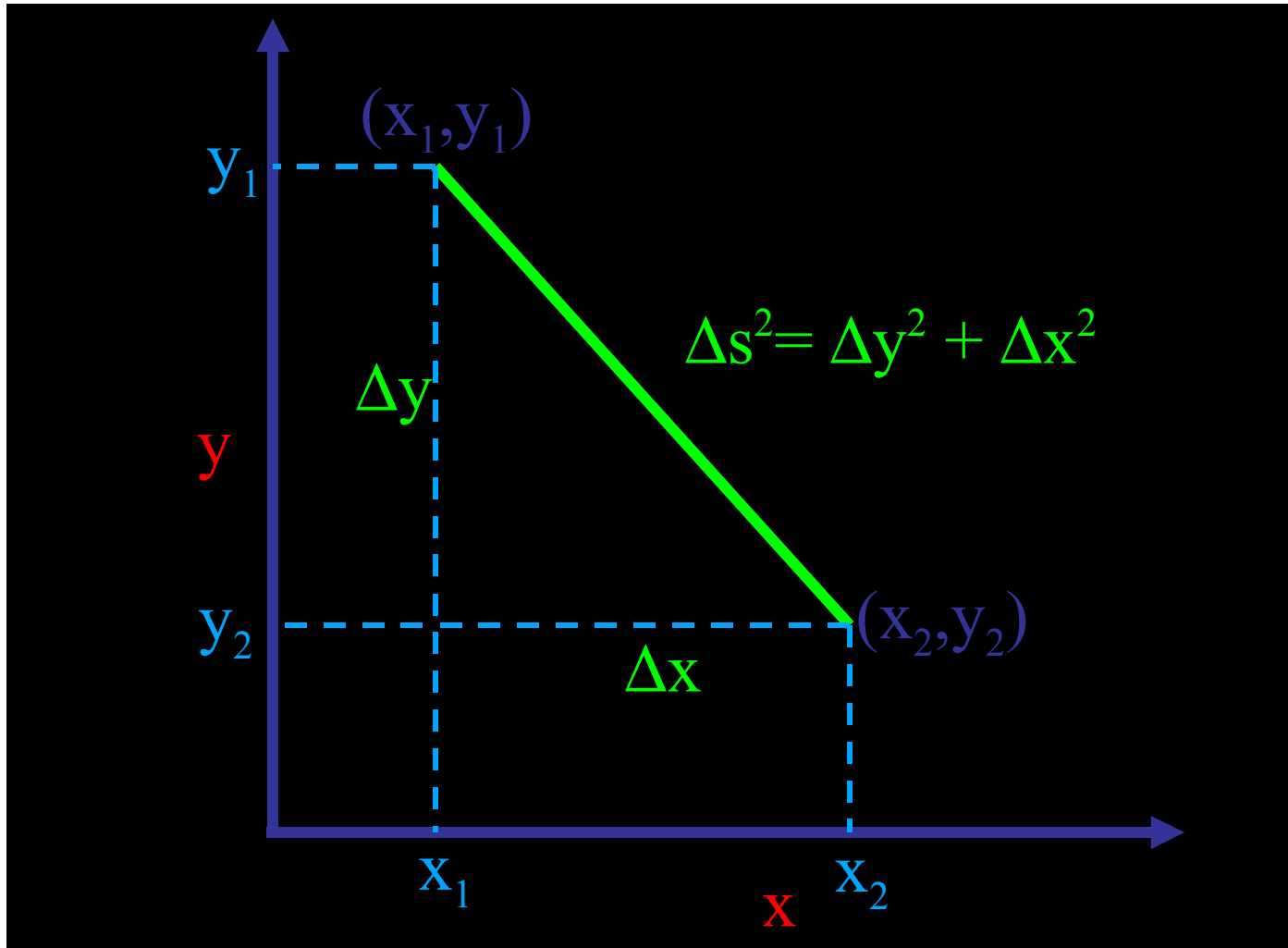
# World lines — accelerate



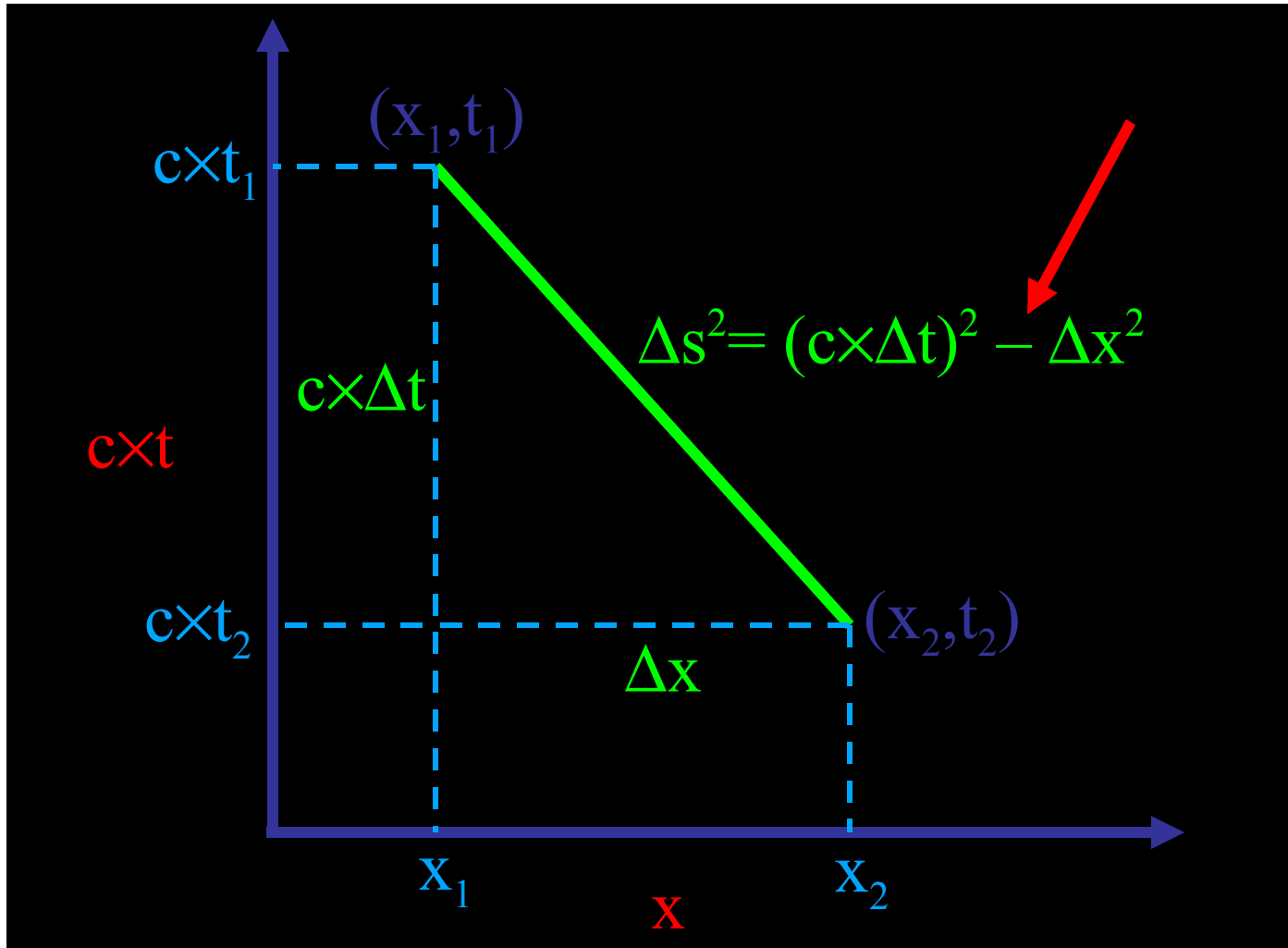
# World lines — decelerate



# Intervalli geometrici



# intervalli di spaziotempo



$$\Delta s^2 = (c \times \Delta t)^2 - \Delta x^2$$

- – segno: differenza tra spazio e tempo
- $\forall \Delta s^2$  è invariante per trasformazioni di Lorenz
- per particelle in moto alla velocità della luce:  
 $\Delta x = c \times \Delta t \Rightarrow \Delta s^2 = 0$   
 $\Rightarrow$  distanza nulla



# intervalli di spazio-tempo

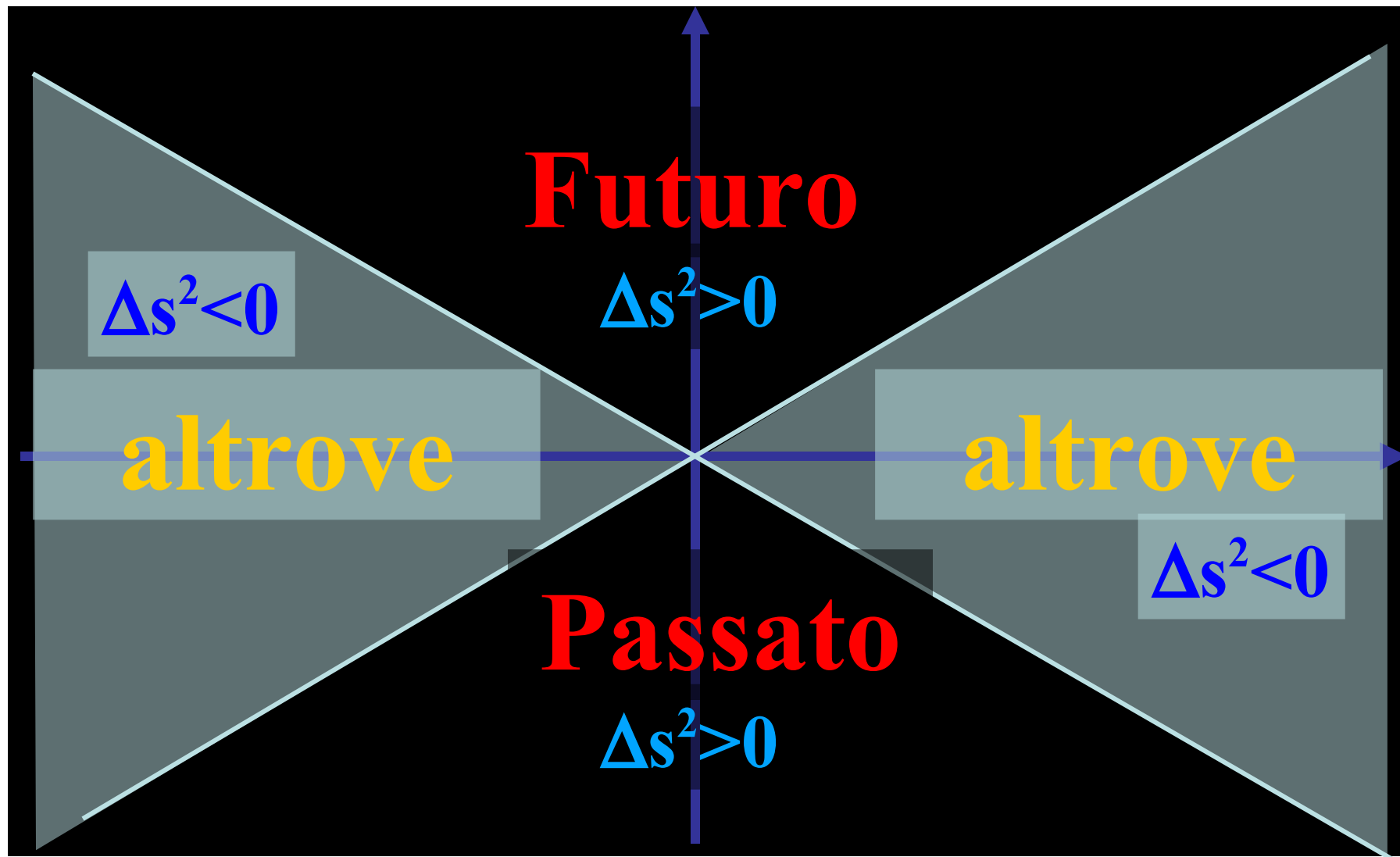
$$\forall \Delta s^2 > 0 \Rightarrow c \times \Delta t > \Delta x$$

- distanza che può essere percorsa alla velocità  $c$
- Esiste un sistema inerziale in cui i due eventi hanno luogo nella stessa posizione
- Ma non succedono mai simultaneamente  
 $\Rightarrow$  **distanza time like**

$$\forall \Delta s^2 < 0 \Rightarrow c \times \Delta t < \Delta x$$

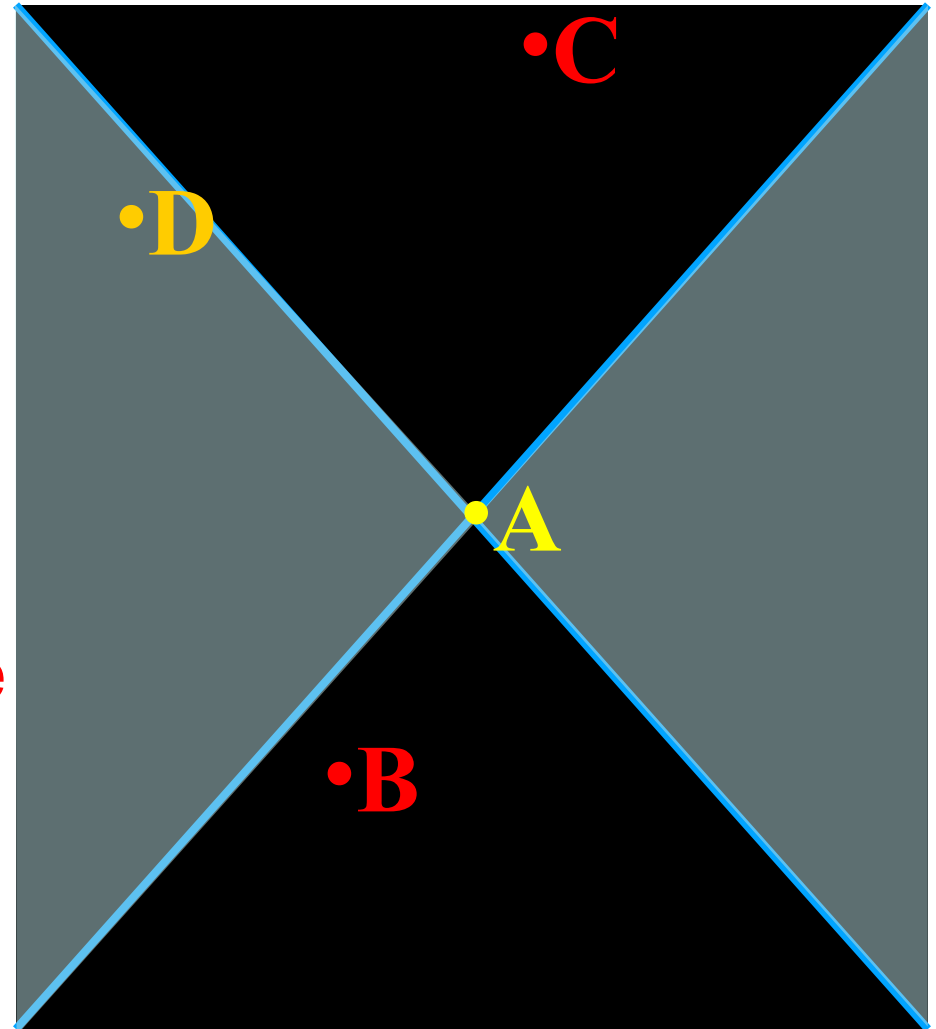
- Distanza che non può essere percorsa a velocità  $c$   
esiste un sistema inerziale in cui i due eventi succedono simultaneamente
- Ma non succedono mai nello stesso posto  
 $\Rightarrow$  **distanza space like**

# Futuro, passato, altrove



# Principio di causalità

- Tutti gli osservatori concordano che B è nel passato di A e C nel futuro
- Alcuni vedono A capitare prima, altri che D capita per primo
- La causa deve sempre precedere l'effetto  
⇒ A non deve influenzare D e vice versa  
⇒ nulla può muoversi più velocemente di c



# Il Paradosso dei gemelli

- Anna e Betta sono sorelle gemelle. Betta sceglie di partecipare alla prima missione interstellare che vola ad Alpha Centauri e ritorna ad una velocità quasi uguale a **c**.



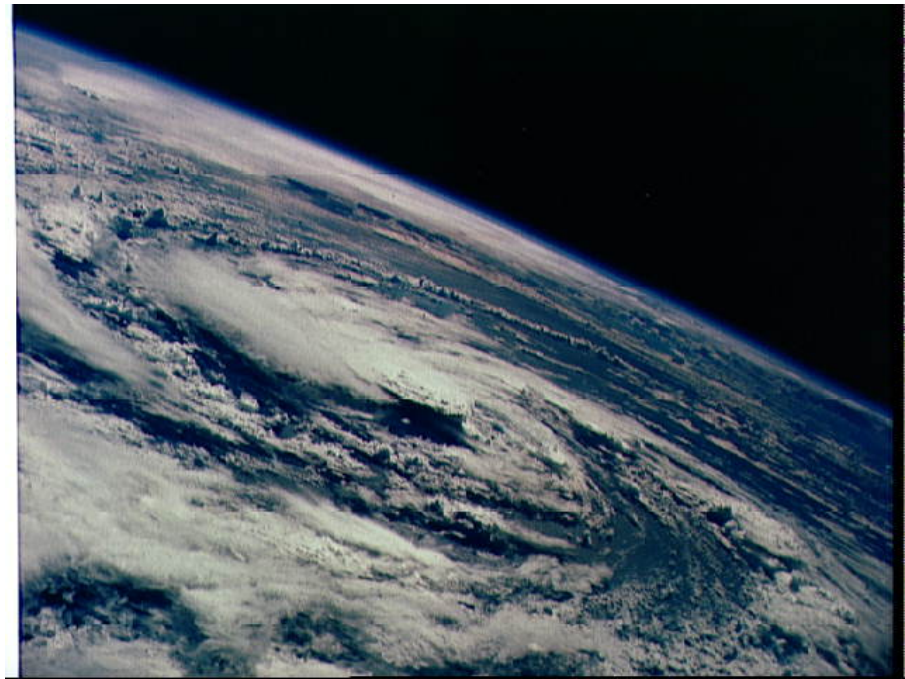
**Anna**



**Betta**

# Cosa vede Anna (da terra)

- Betta viaggia a velocità prossima a  $c$ . Il suo orologio rallenta.
- quindi al suo ritorno:  
⇒ **Betta è più giovane.**



# Cosa vede Betta (in viaggio per Alpha Centauri)

- Anna sta viaggiando con la Terra a circa  $c$ . Il suo orologio rallenta.
- Quindi al suo ritorno:  
**⇒ Anna è più giovane.**

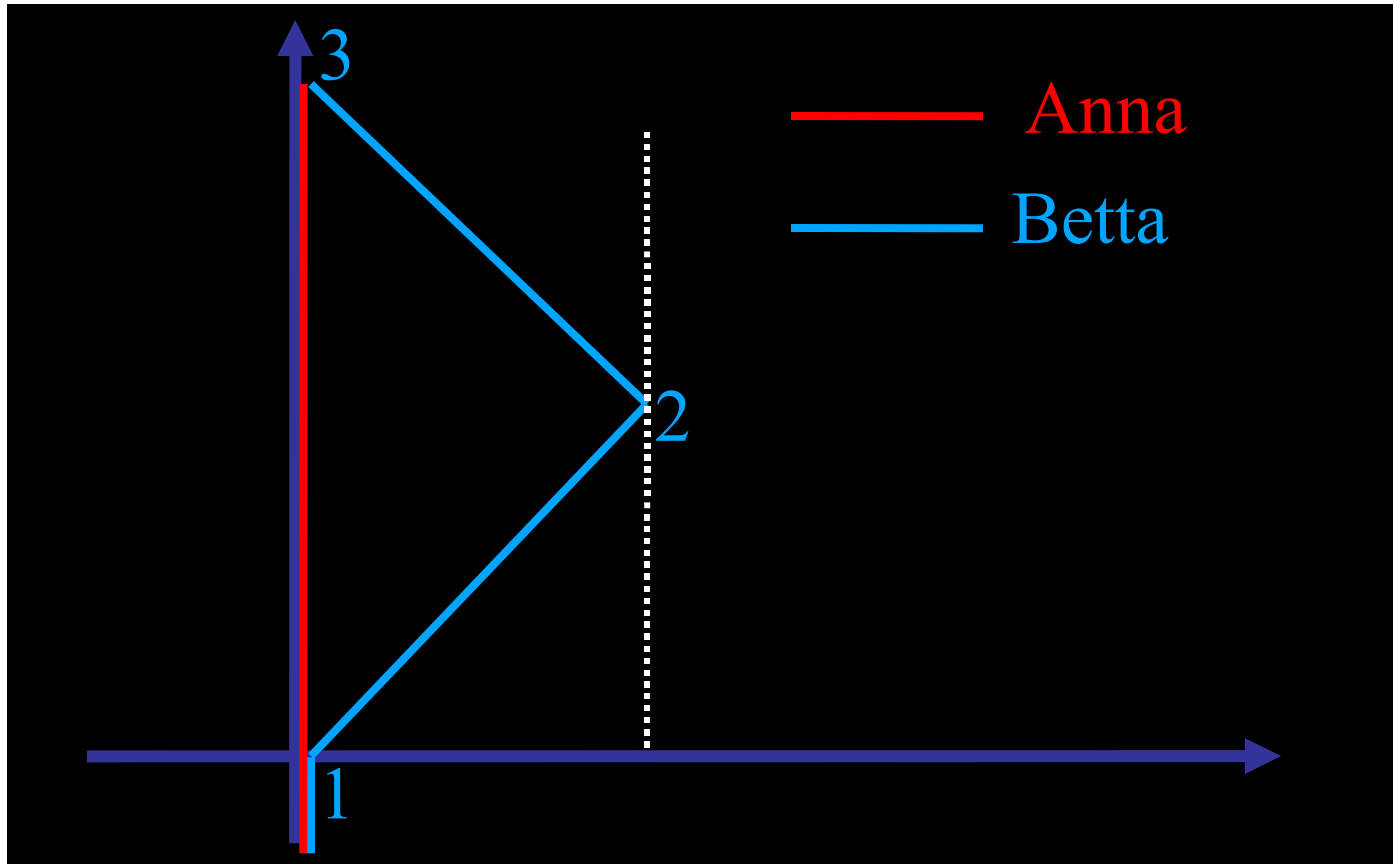


# Chi ha ragione ?

- Ovviamente una delle due.
- Principio di relatività: **Tutti I sistemi di riferimento inerziali sono equivalenti**
- Sono entrambe in un sistema di riferimento inerziale?
  - Anna (sulla Terra): **si**
  - Betta (sull'astronave): **no**.

Mentre Anna è in viaggio verso Alpha Centauri in un sistema inerziale, Betta cambia sistema di riferimento 3 volte

# Il viaggio di Anna e Betta in un diagramma di Minkowski



**⇒ Betta è più giovane**



# Cosa mantiene in orbita lo Space Shuttle?



⇒ Lo Space Shuttle cade continuamente verso la Terra

# C'è gravità nello spazio ?

Certo che c'è gravità, all'orbita dello Shuttle è ancora ~80-90% del suo valore a terra.



⇒ Allora perchè gli astronauti sembrano senza peso?

# Che effetti ha la massa?

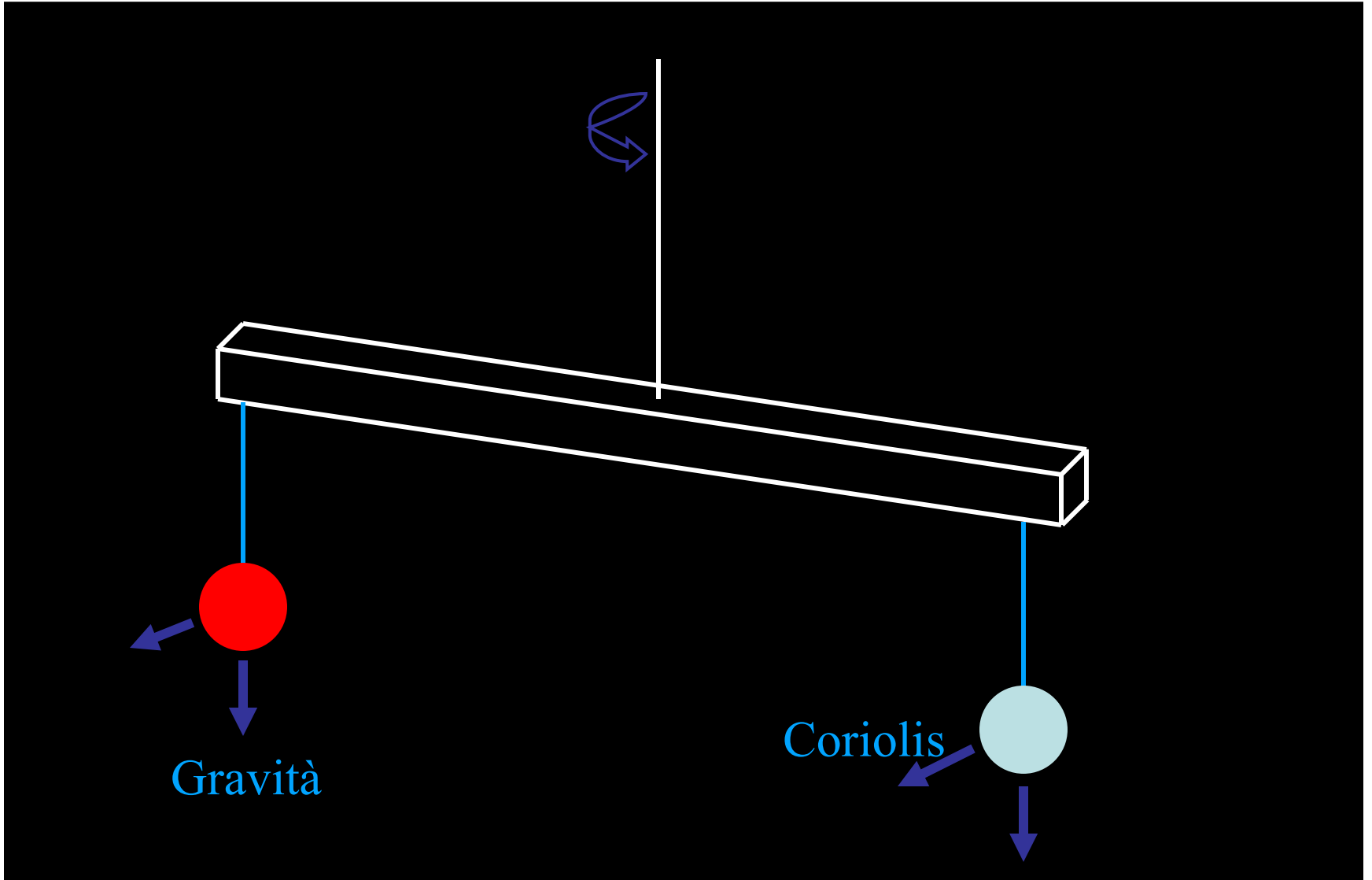
- **Gravità:** tendenza che i corpi massicci hanno ad attrarsi l'un l'altro
- **Inerzia:** resistenza che un corpo oppone ai cambiamenti del suo stato di moto

# Gravità e inerzia sono la stessa cosa ?

- **No.** sono concetti fisici totalmente diversi.
- Non ci sono motivi a priori perchè siano identici. Per la forza elettromagnetica (forza di Coulomb), la sorgente (la carica  $Q$ ) e l'inerzia ( $m$ ) sono differenti.
- Ma per la gravità sembrano essere identiche

⇒ Principio di Equivalenza

# Esperimento di Eötvös



# Resultati dell'esperimento di Eötvös

- La massa Gravitazionale ed Inerziale sono identiche entro una parte su un miliardo
- Esperimenti moderni: identiche entro una parte su cento miliardi

# Effetti della massa

- Sogente di gravità

$$F = G \frac{M m_{gravity}}{r^2}$$


- Inerzia

$$F = m_{inertia} \times a$$

# Principio di Equivalenza

$$F = m_{inertial} \times a = G \frac{M m_{gravity}}{r^2}$$

$$\Rightarrow a = \left( \frac{m_{gravity}}{m_{inertial}} \right) \times G \frac{M}{r^2}$$

 = 1



# Principio di equivalenza debole

Le **leggi della meccanica** sono esattamente le stesse nei sistemi inerziali e in quelli in caduta libera. La gravità è indistinguibile da qualsiasi altra accelerazione.

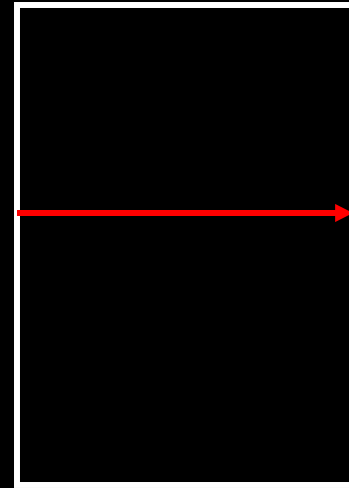
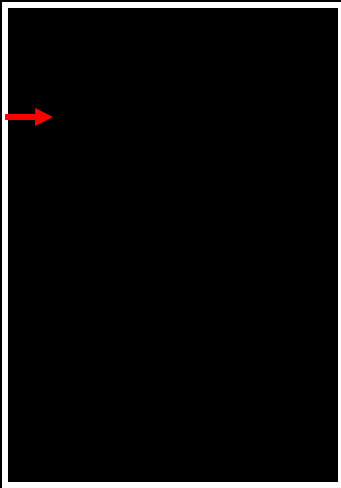


# Principio di equivalenza forte

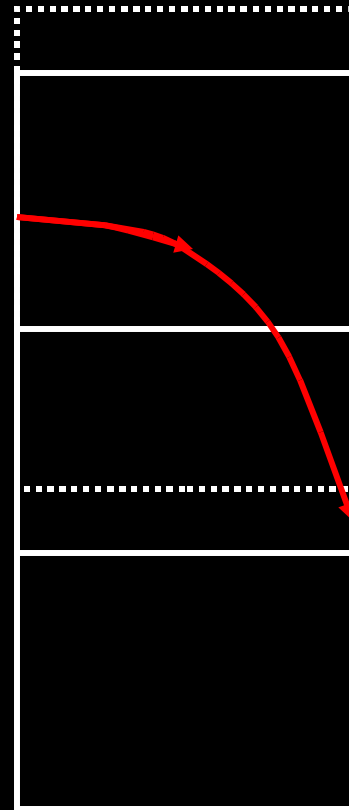
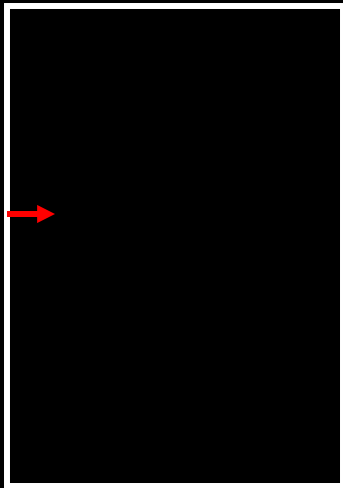
Le **leggi della fisica** sono esattamente le stesse nei sistemi inerziali e in quelli in caduta libera, nessun esperimento le può distinguere.



# Conseguenze del principio di equivalenza: la massa piega la luce

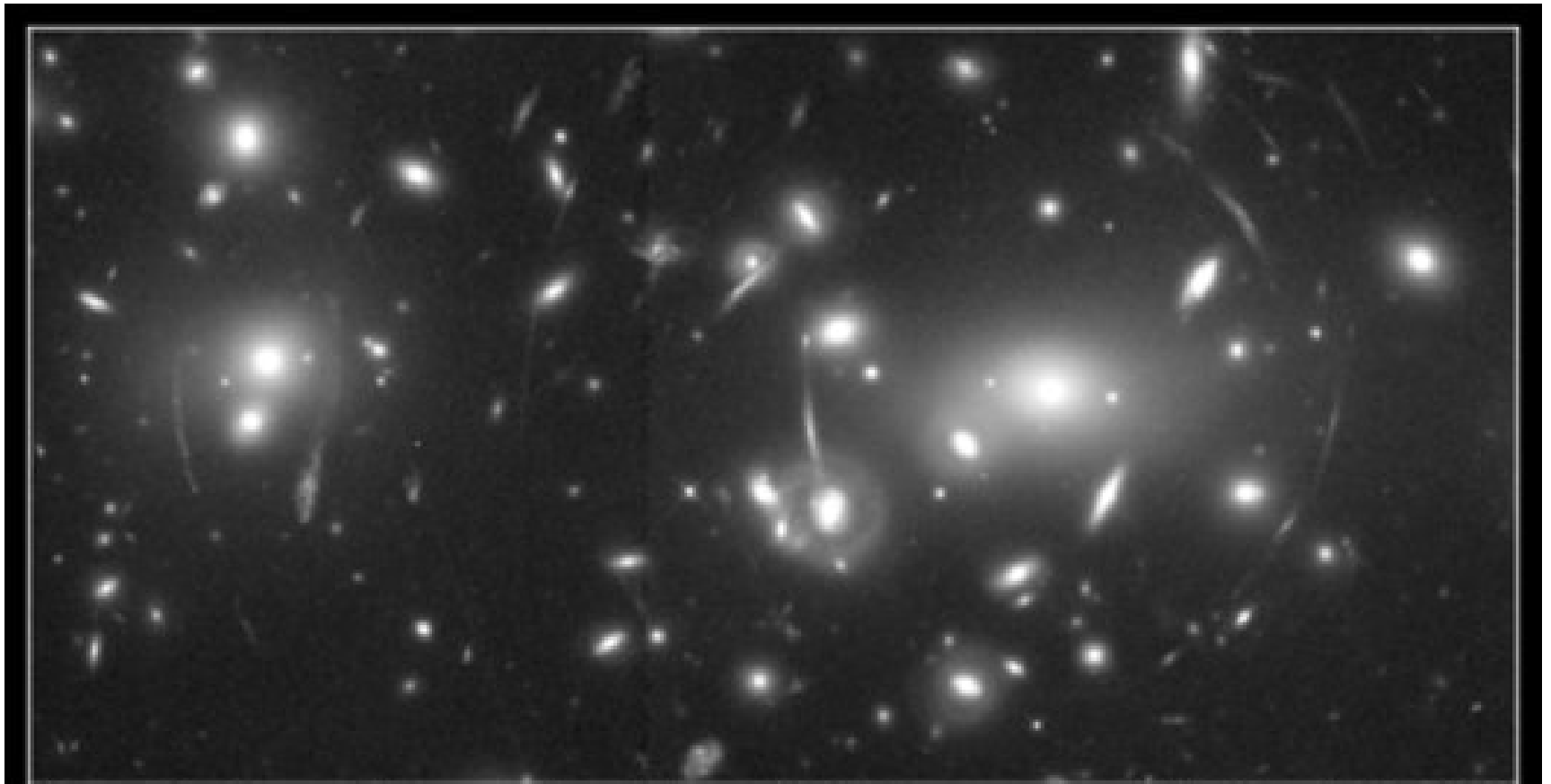


Osservatore in un sistema di riferimento  
in caduta libera



Osservatore esterno

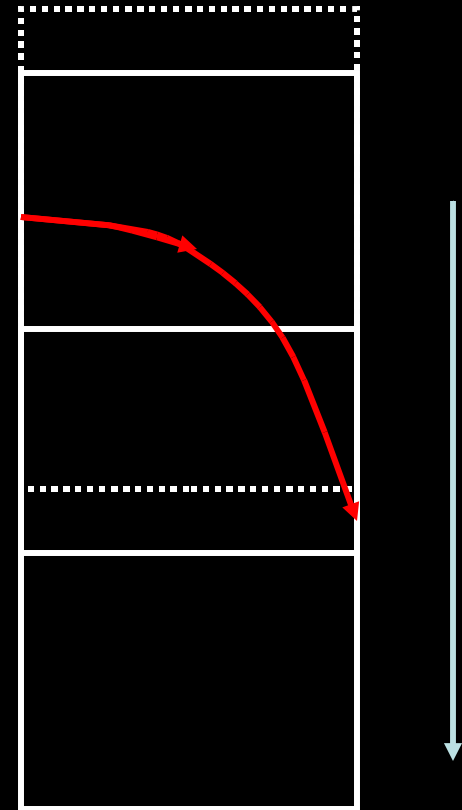
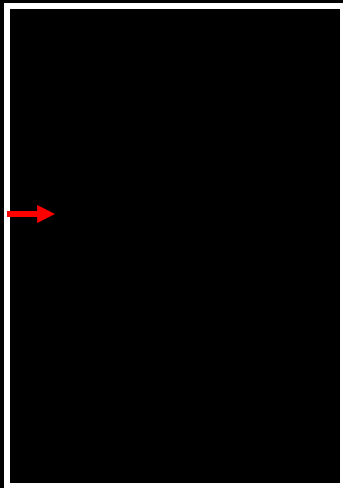
# Esempi di piegatura della luce



**Gravitational Lens in Abell 2218**

**HST · WFPC2**

PF95-14 · ST ScI OPO · April 5, 1995 · W. Couch (UNSW), NASA



**Principio di Equivalenza: Sistemi accelerati equivalgono a sistemi soggetti alla gravità**

Osservatore esterno

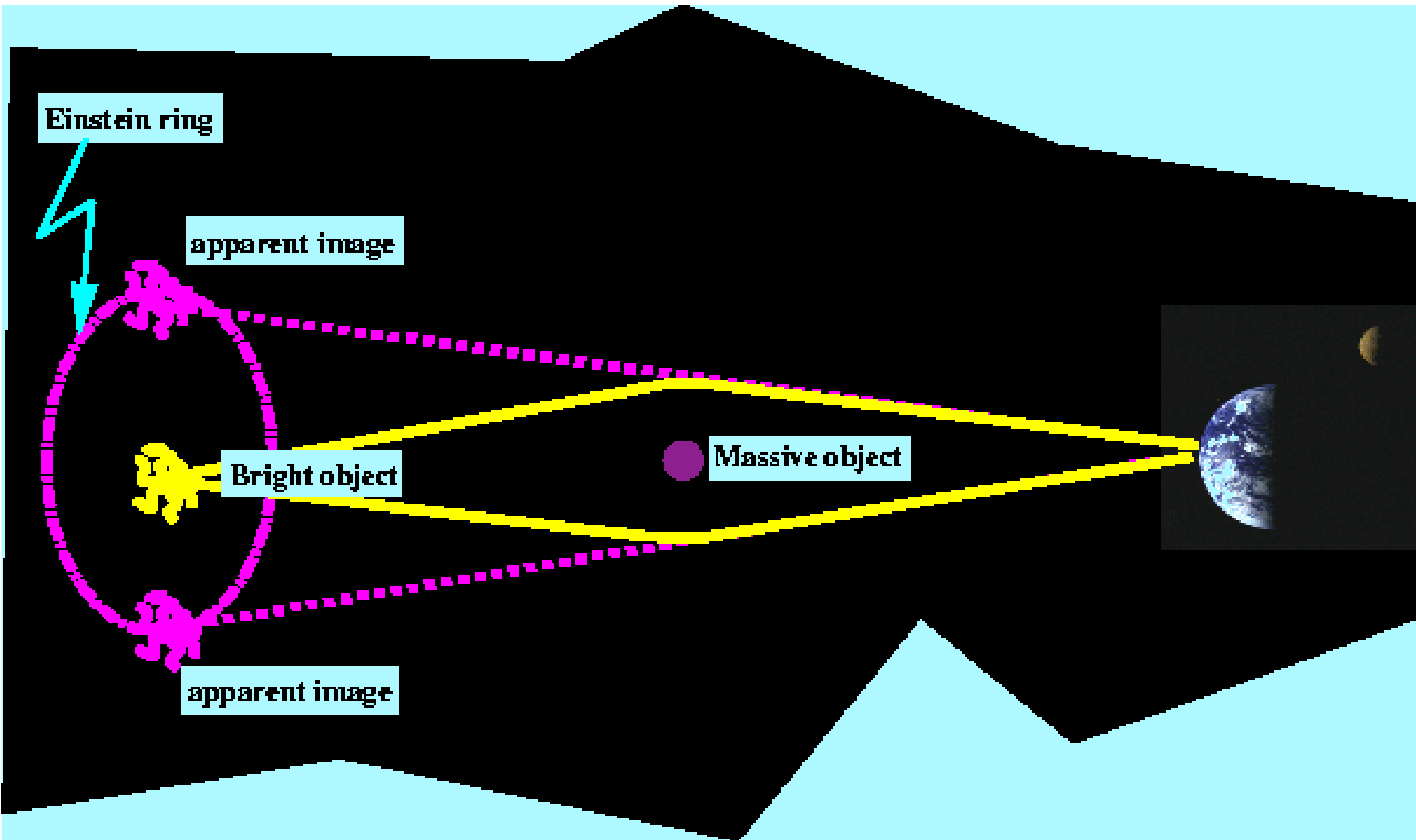
Einstein ring

apparent image

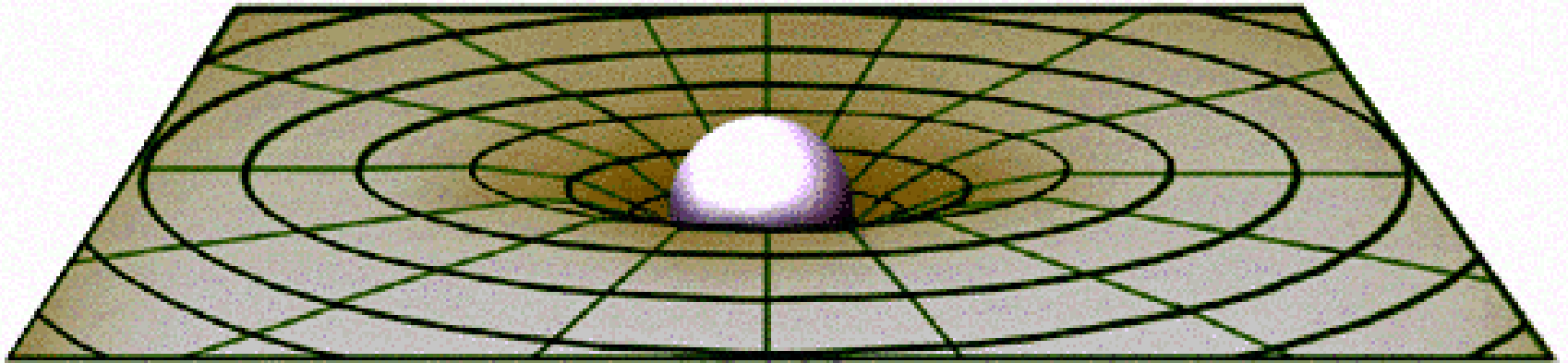
Bright object

Massive object

apparent image



# Spazio incurvato da una massa



# Relatività Generale

- **La Massa dice allo spazio come curvarsi**
- **Lo Spazio dice alla massa come muoversi**



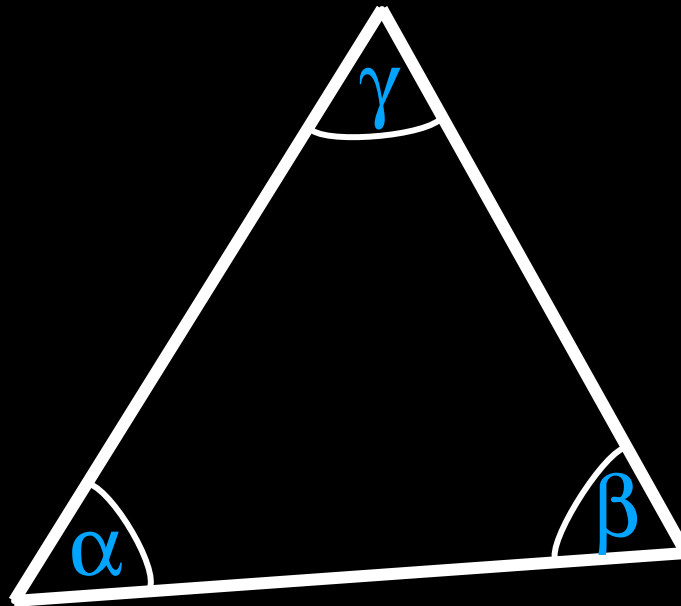
# Effetti predetti dalla teoria della Relatività Generale

- La Gravità piega la luce
- Redshift Gravitazionale
- Dilatazione Gravitazionale del tempo
- Contrazione Gravitazionale delle lunghezze

# Principio di minima azione

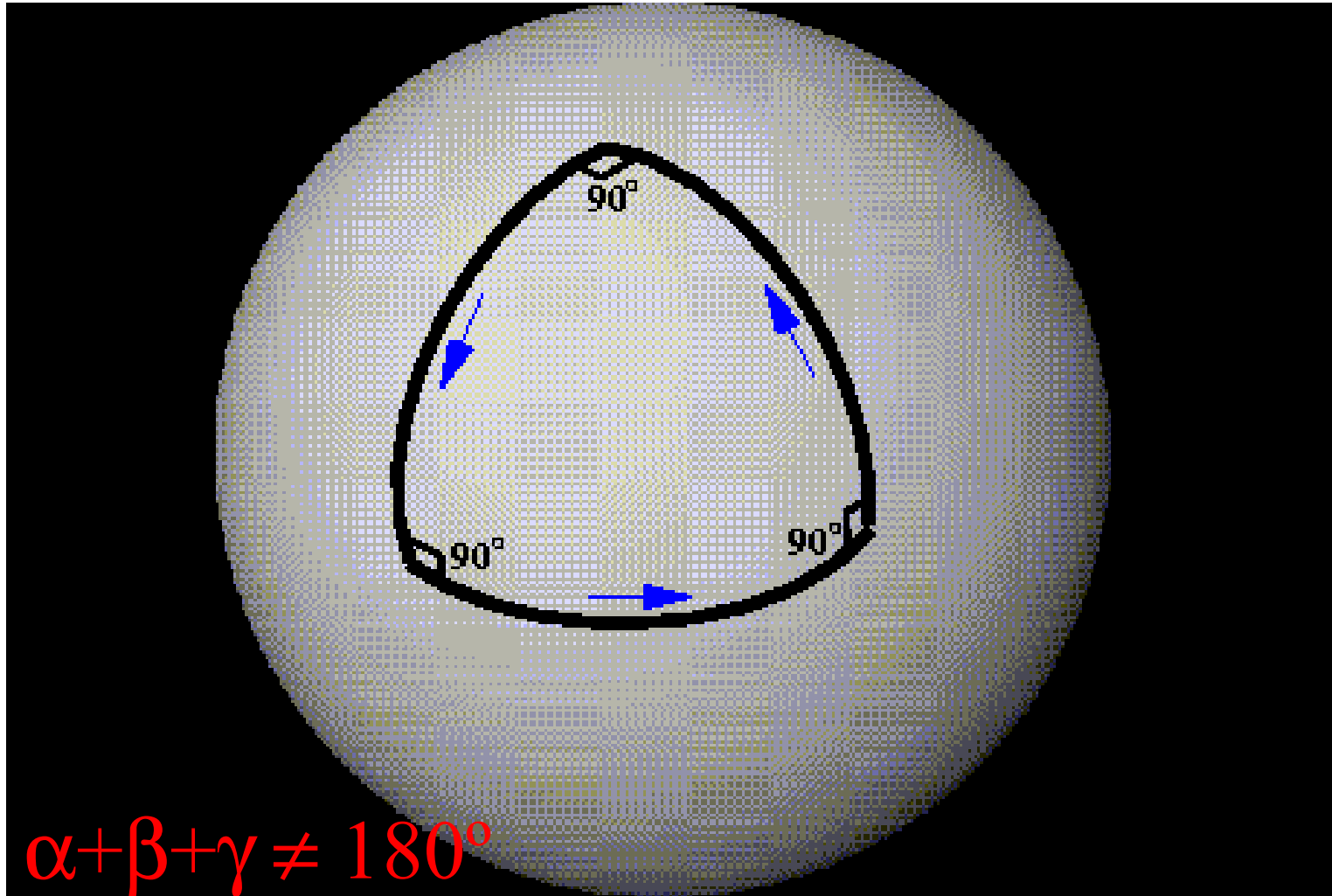
- La luce si propaga lungo traiettorie che minimizzano la distanza fra due punti  
⇒ nello spazio piatto: linee rette
- Una traiettoria che minimizza le distanze tra due punti si chiama **geodetica**
- Esempi di geodetiche
  - Su un piano: linea retta
  - Su una sfera: cerchio massimo

# Spazio piatto

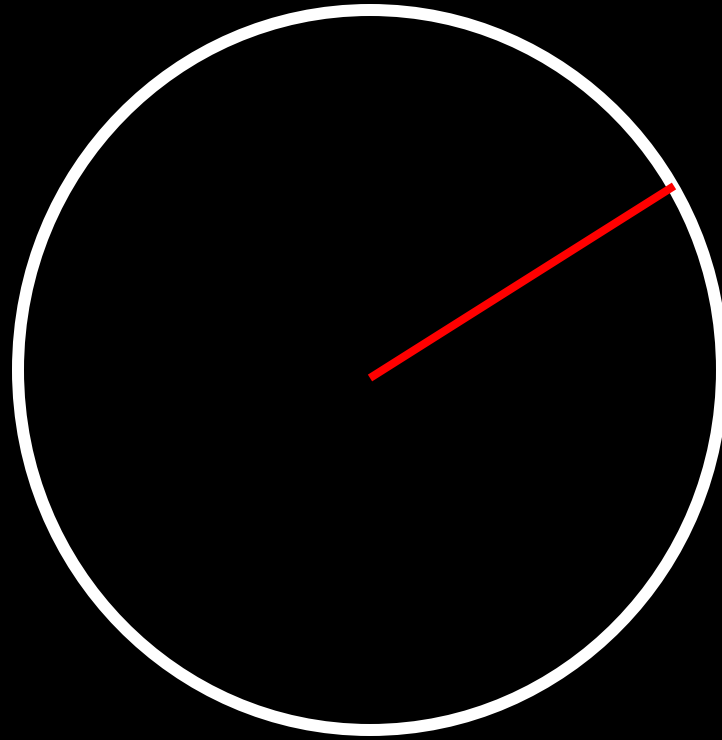


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

# Spazio curvo

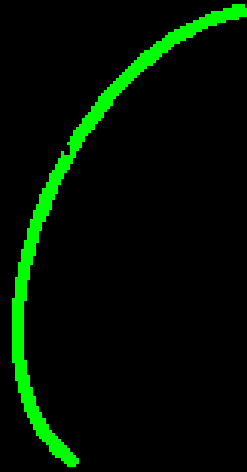


# Spazio piatto



circonferenza =  $2\pi \times$  raggio

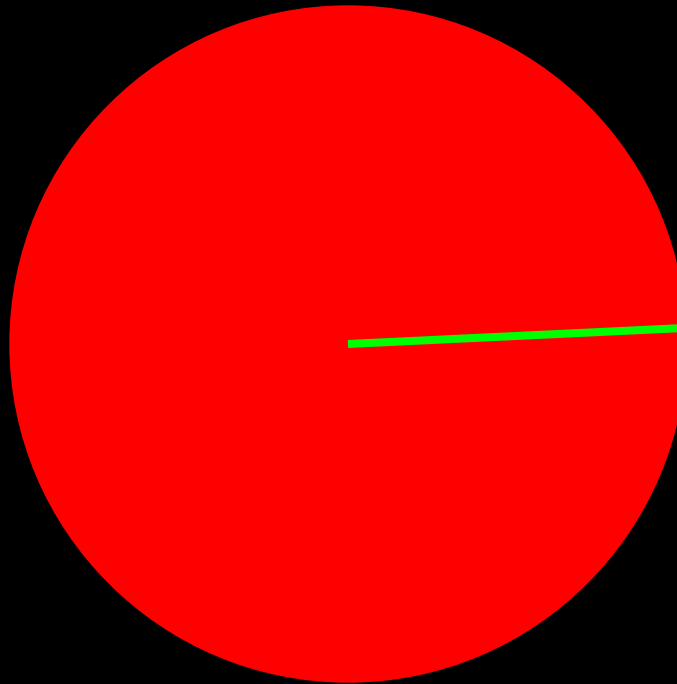
# Spazio curvo



circonferenza  $\neq 2\pi \times$  raggio

# Perchè la curvatura dello spazio corrisponde alla gravità?

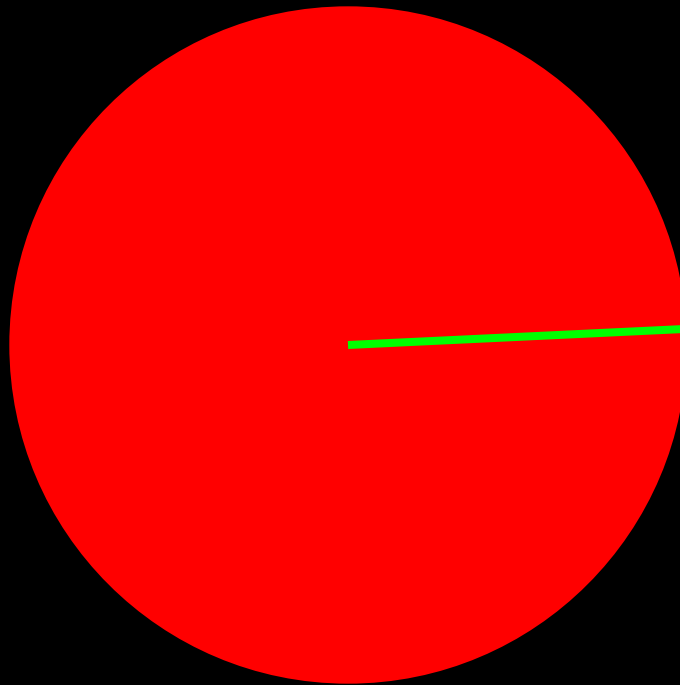
Disco non-rotante



raggio:  $r$

circonferenza:  $2\pi r$

Disco rotante



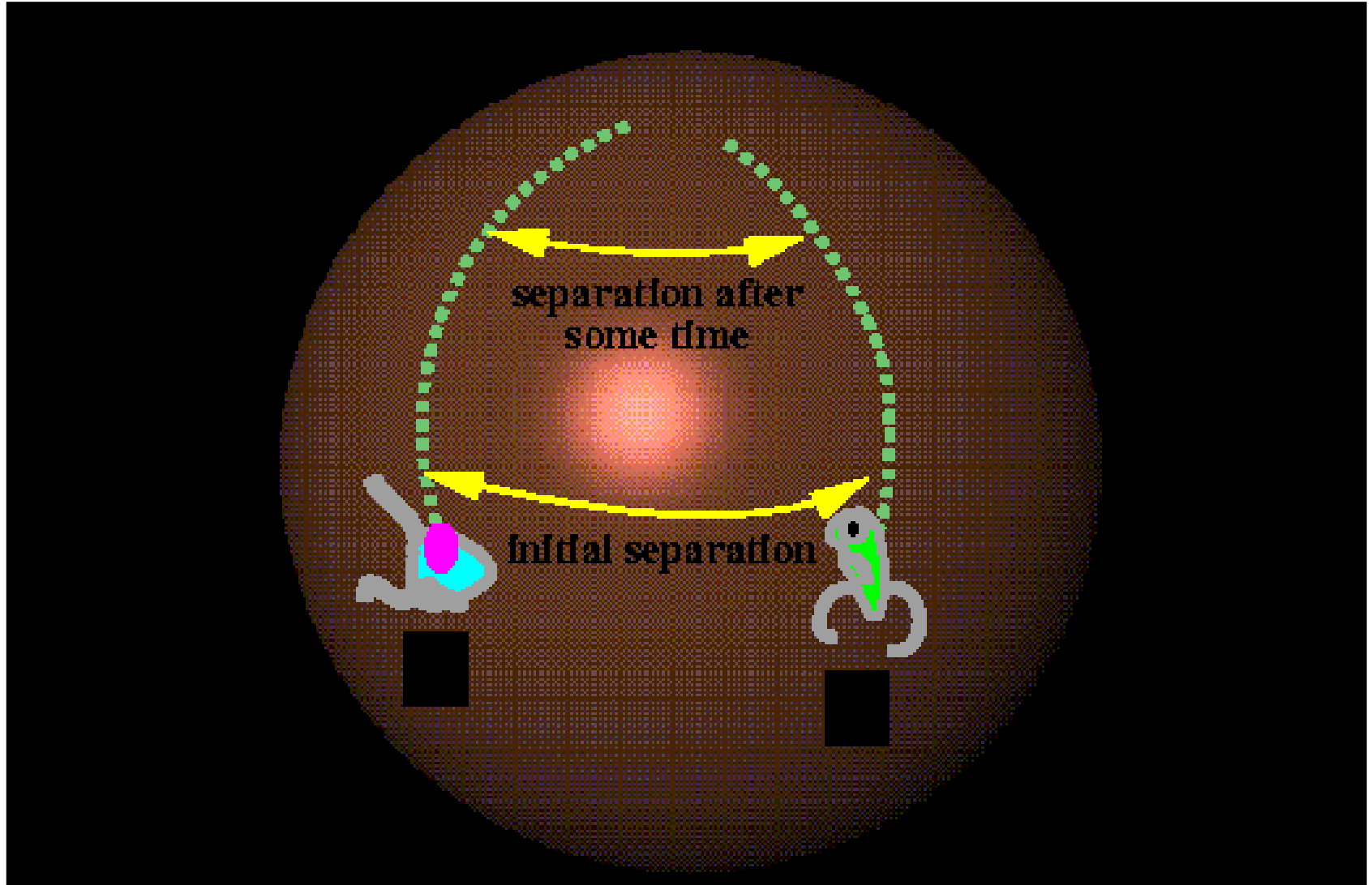
raggio:  $r$

Contrazione delle lunghezze

$\Rightarrow$  circonferenza:  $< 2\pi r$



# Perchè la curvatura dello spazio equivale ad attrazione ?



# Geometria Euclidea (piatta):

- Data una retta e un punto fuori di essa, per quel punto passa una e una sola retta parallela alla prima retta
- la circonferenza di un n cerchio di raggio  $r$  è  $2\pi r$
- La somma dei tre angoli interni di un triangolo è uguale a  $180^\circ$

# Geometria Sferica:

- Data una retta e un punto fuori di essa, per quel punto non si può tracciare alcuna parallela alla retta data
- la circonferenza di un cerchio di raggio  $r$  è inferiore a  $2\pi r$
- La somma dei tre angoli interni di un triangolo è maggiore di  $180^\circ$

# Geometria Iperbolica:

- Data una retta e un punto fuori di essa, per quel punto si possono tracciare infinite parallele alla retta data
- la circonferenza di un cerchio di raggio  $r$  è maggiore di  $2\pi r$
- La somma dei tre angoli interni di un triangolo è minore di  $180^\circ$

# Spazio-tempo

- Quarta coordinata:  $ct$
- La coordinata temporale ha segno diverso dalle coordinate spaziali
- Distanza nello spazio-tempo:

$$\Delta s^2 = \alpha c^2 \Delta t^2 - \beta c \Delta t \Delta x - \gamma \Delta x^2$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma$ : coefficienti metrici

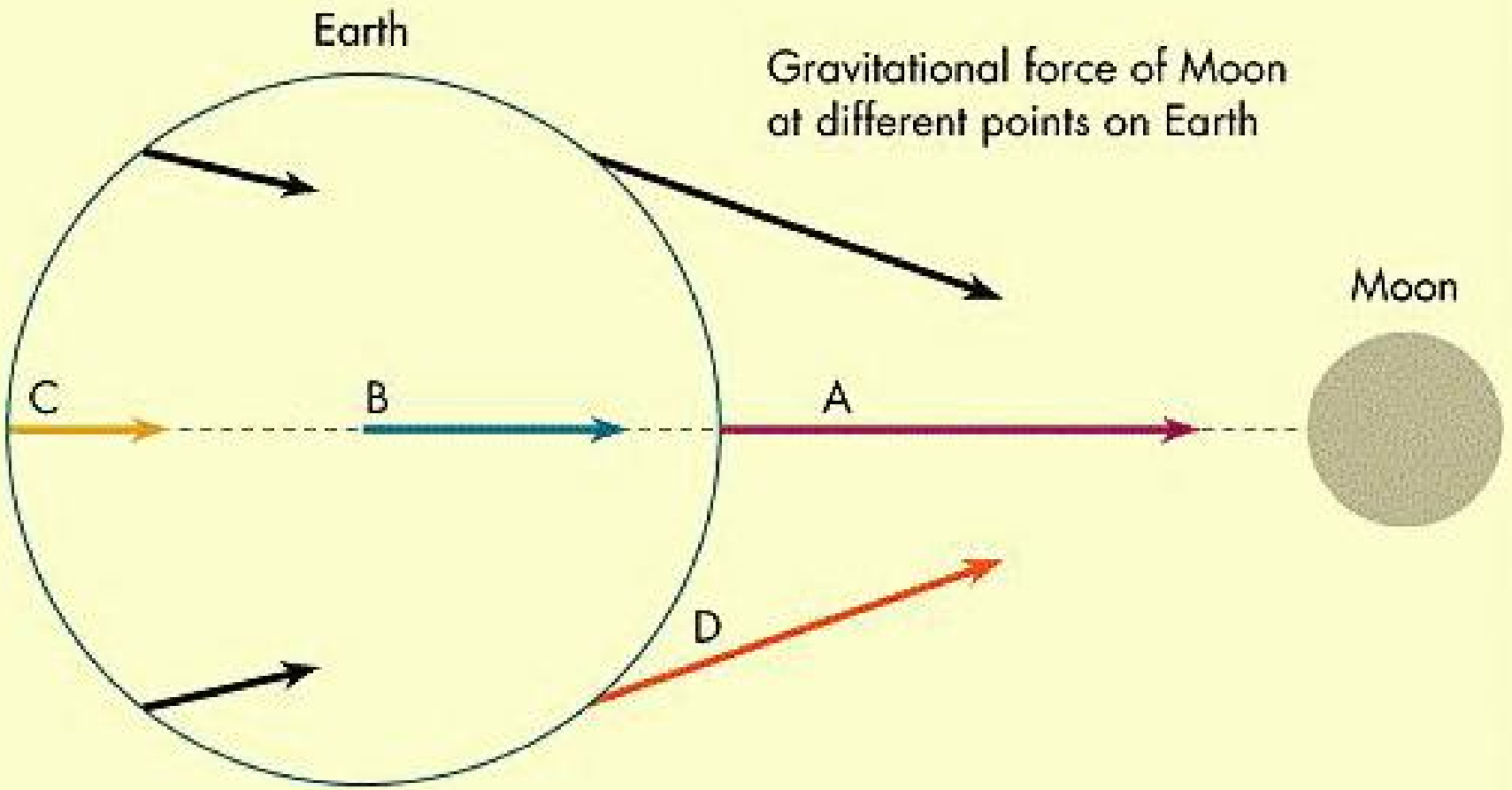
# Alcuni effetti predetti dalla teoria della relatività generale

- La gravità incurva la luce
- Redshift gravitazionale
- Dilatazione gravitazionale dei tempi
- Contrazione gravitazionale delle lunghezze

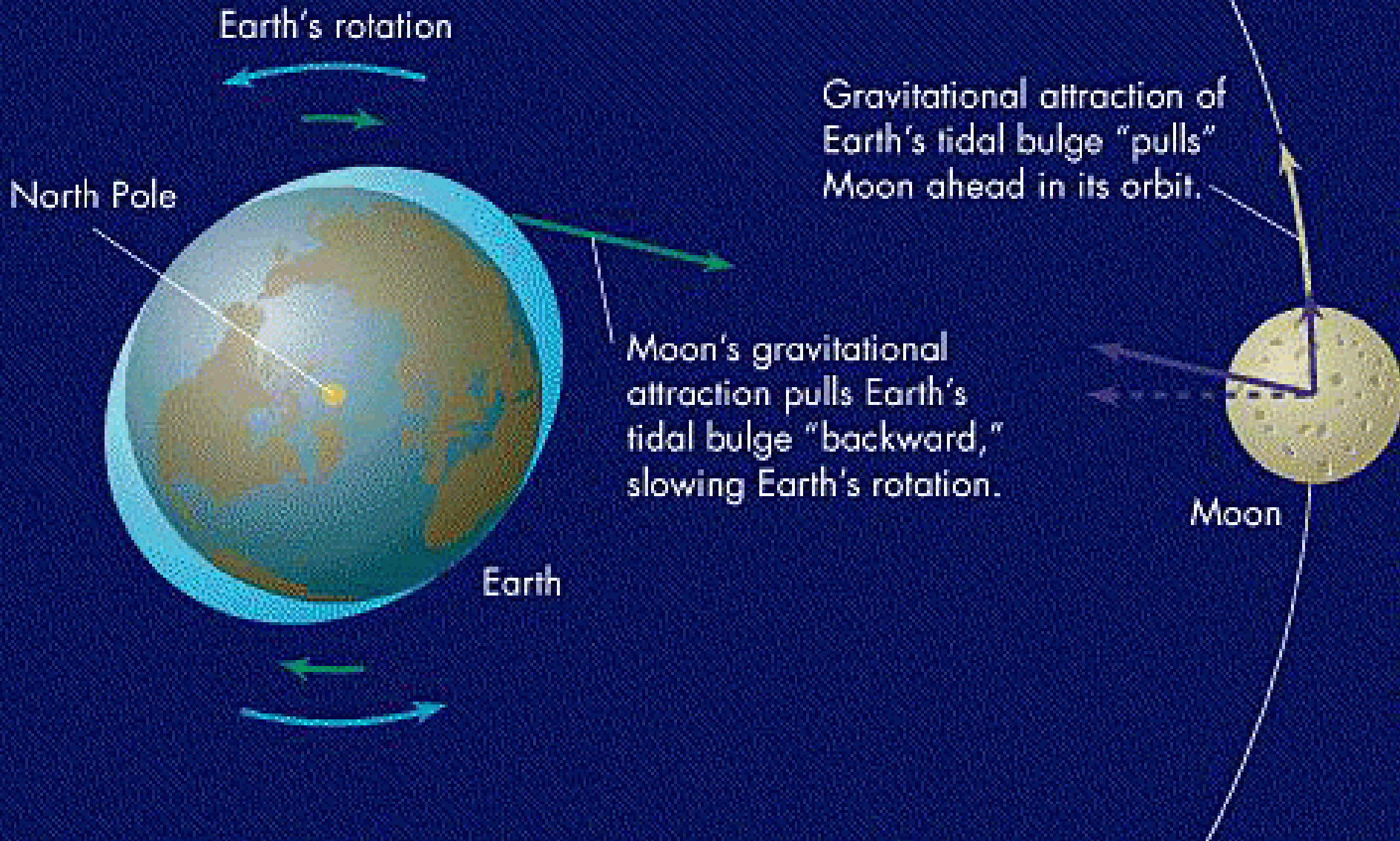
# Forze mareali

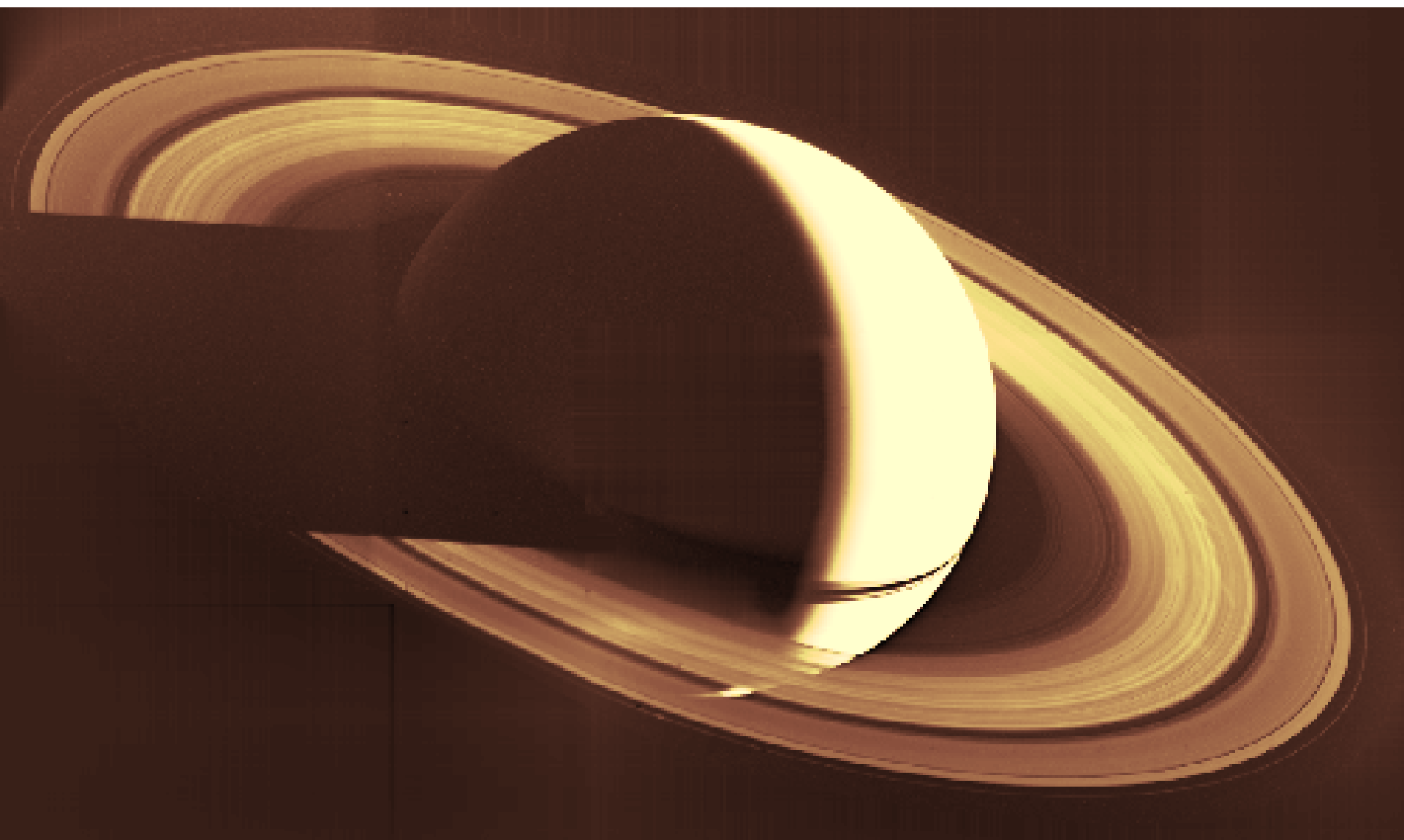


Gravitational force of Moon  
at different points on Earth









# L' esistenza delle forze mareali viola il principio di equivalenza ?

- Non esistono sistemi di riferimento in caduta libera in cui **la gravità sparisca globalmente**
- Esistono sistemi di riferimento in caduta libera in cui **la gravità sparisce localmente**
- Il principio di equivalenza vale per **piccoli laboratori**, “piccoli” se paragonati alle distanze sulle quali il campo gravitazionale cambia in modo significativo.
- Lo Spazio-tempo è localmente piatto

# Verso una nuova teoria della gravità ...

## Requisiti:

- Dovrebbe localmente soddisfare il principio di equivalenza
- Dovrebbe connettere la geometria dello spazio alla distribuzione della massa e dell'energia
- Localmente dovrebbe essere piatto
- Dovrebbe coincidere con la gravità Newtoniana per piccole velocità (rispetto a  $c$ ) e per deboli campi gravitazionali

# L'intero Universo in una formula

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}$$

Geometria dello  
Spazio-tempo  
(tensore di Einstein)

Distribuzione della  
Massa e dell'energia  
Nell'Universo  
(tensore stress-energia)

# Perchè la teoria della relatività generale (GR) è difficile ?

- concettualmente difficile (relatività dello spazio e del tempo, curvatura dello spazio-tempo)
- Insieme di 10 equazioni differenziali alle derivate parziali tra loro connesse
- non lineari (le soluzioni non si sovrappongono)
- Spazio e tempo sono parte della soluzione

⇒ le soluzioni esatte sono note solo per pochi semplici casi

# Checklist

- Come trattare le accelerazioni ? ✓
- Come trattare la gravità ? ✓
- La gravità di Newton agisce istantaneamente, i.e. in contrasto con la relatività speciale (l'informazione non può essere trasmessa a velocità superiore a  $c$ ). ✓
- Le distanze sono relative, quale distanza usare per calcolare la forza gravitazionale ? ✓

# Cosa rimane da fare ?

- Dimostrare che la relatività generale fornisce una descrizione consistente ed accurata della natura  
⇒ prove sperimentali/osservative



# Fattore correttivo

- Relatività speciale:

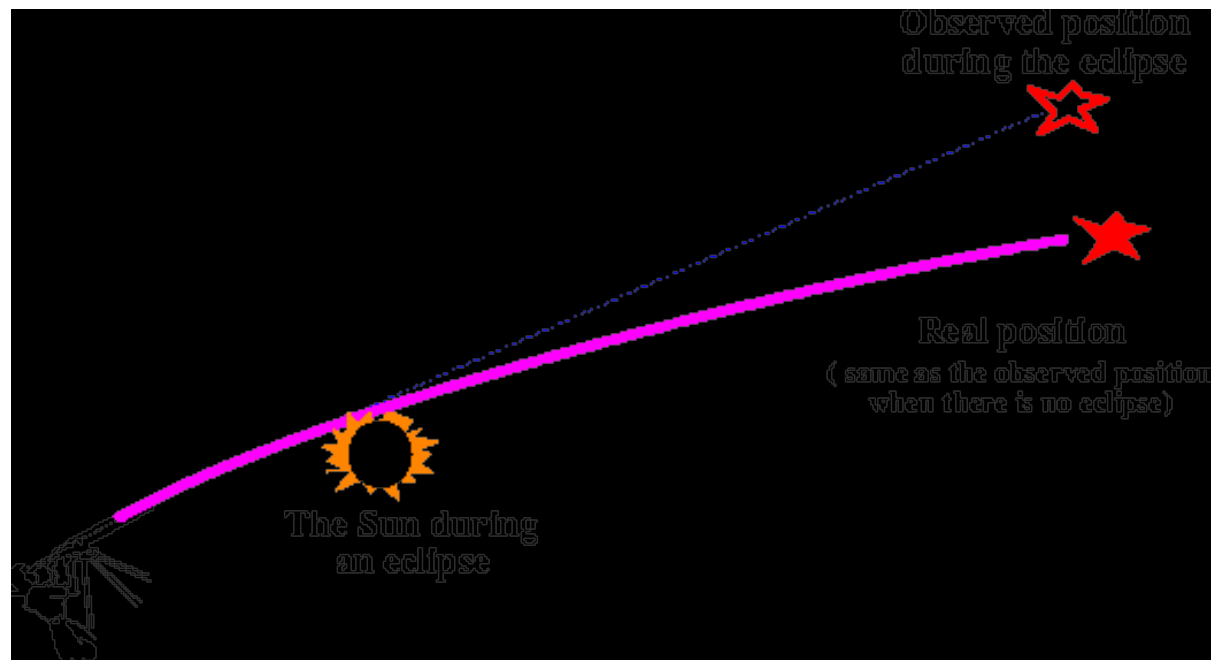
$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

- Relatività generale:

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{esc}^2}{c^2}}}$$

# Primo test: curvatura della luce

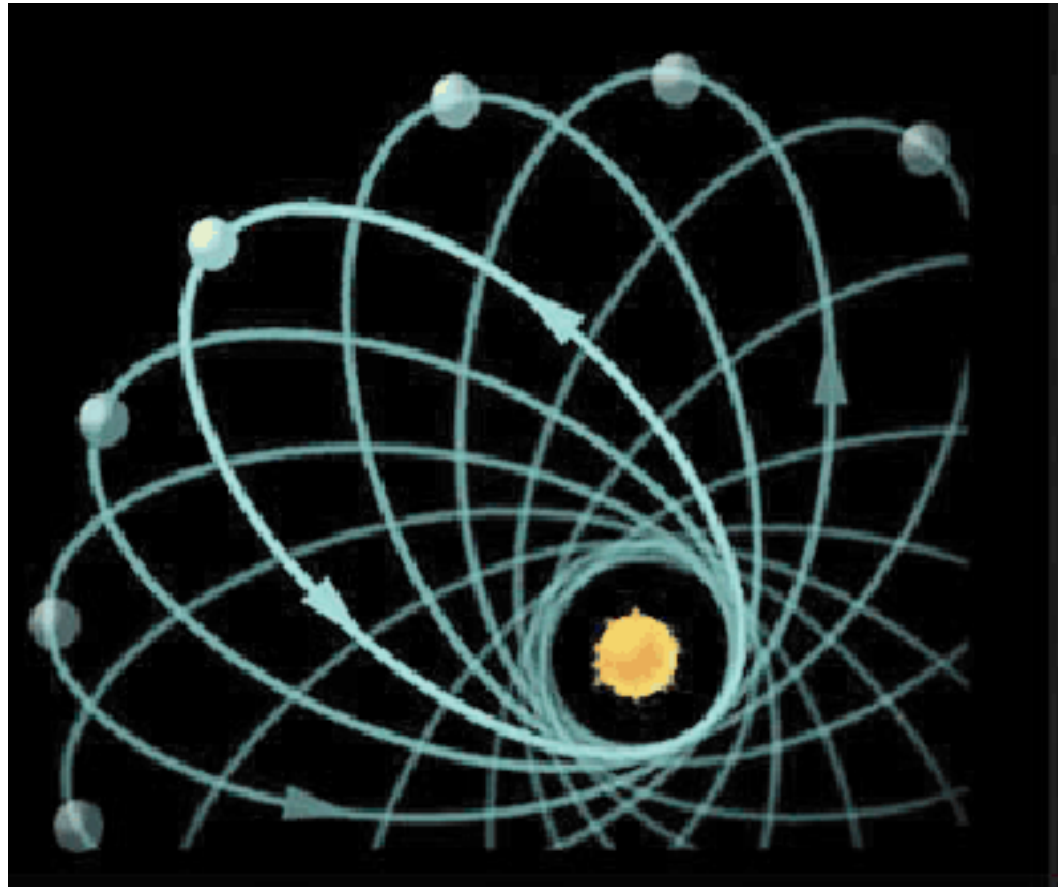
- La luce stellare dovrebbe incurvarsi se passa in prossimità del campo gravitazionale del Sole, i.e., dovrebbe essere possibile vedere una stella “dietro” al Sole



- La relatività generale predice un angolo di  $1.75''$ , il doppio di quanto predetto dalla gravità Newtoniana
- Arthur Eddington nel 1919, fece la misura. Evento epocale che rese Einstein una celebrità.

## Test 2: spostamento del perielio di Mercurio

- I pianeti non muovono su ellissi perfette, gli ellissi precedono. Effetto dovuto alla forza gravitazionale esercitata dagli altri pianeti



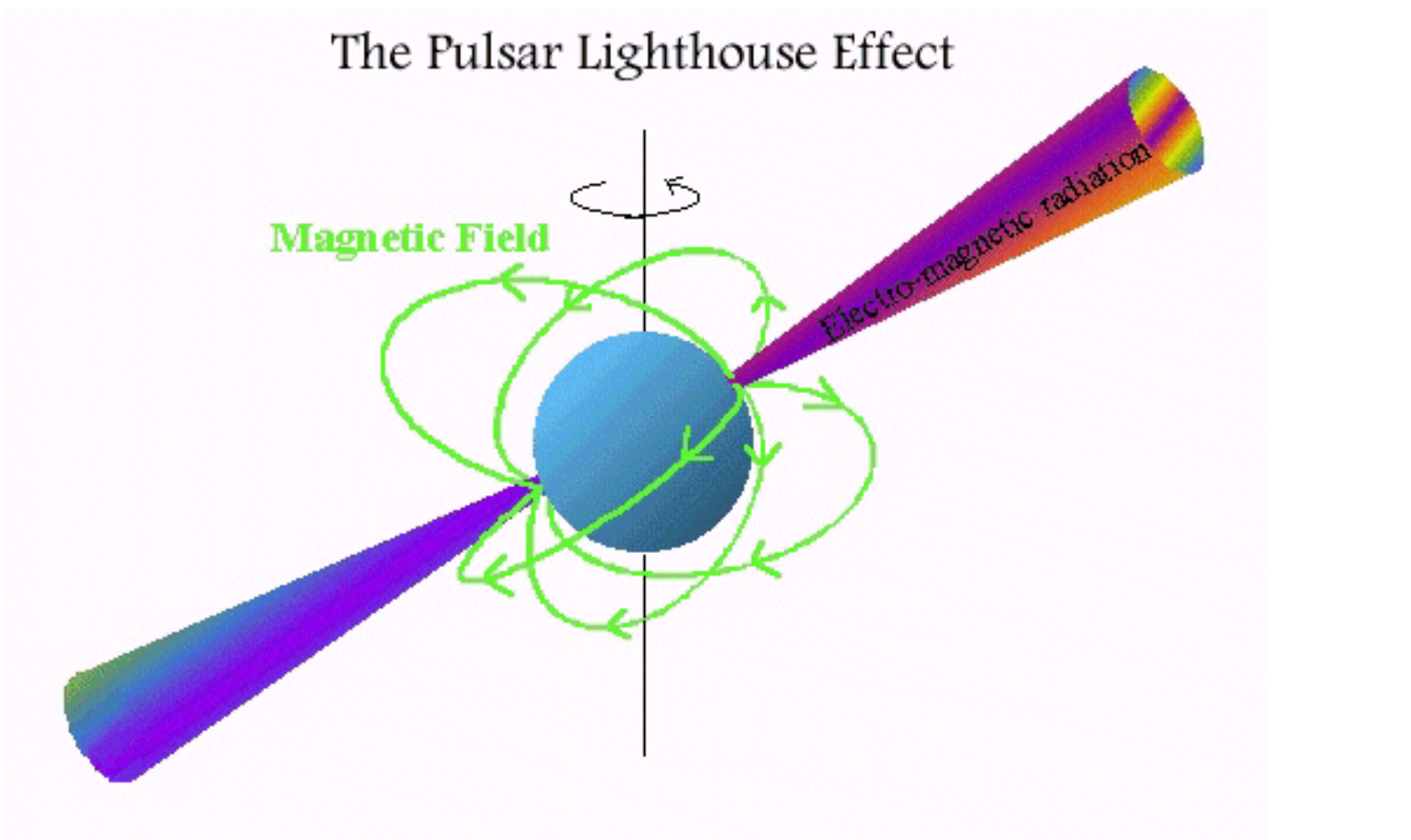
- La precessione di Mercurio ammonta a  $5600''$  ogni secolo, ma solo  $5557''$  possono essere spiegati con la gravità Newtoniana, la discrepanza è di  $43''$  per secolo.
- La relatività generale predice esattamente questa precessione aggiuntiva

## Test 3: dilatazione dei tempi e redshift gravitazionale

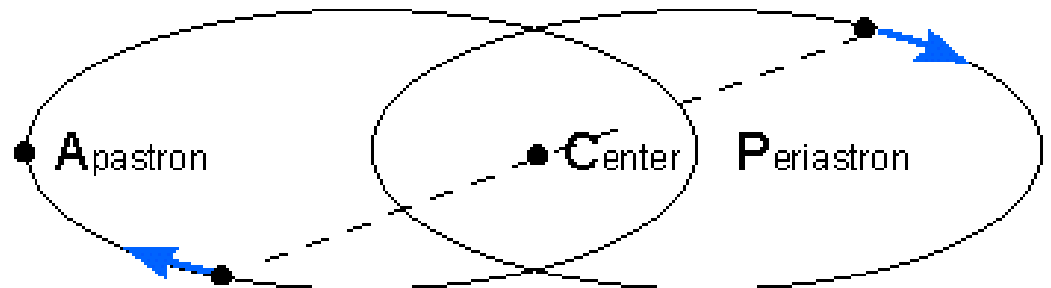
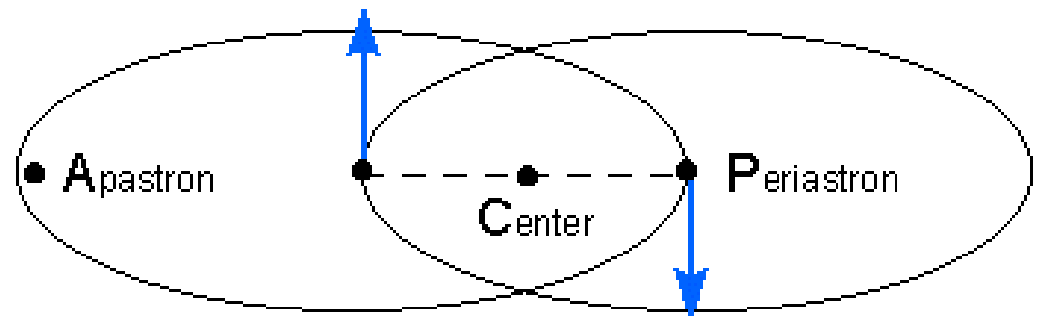
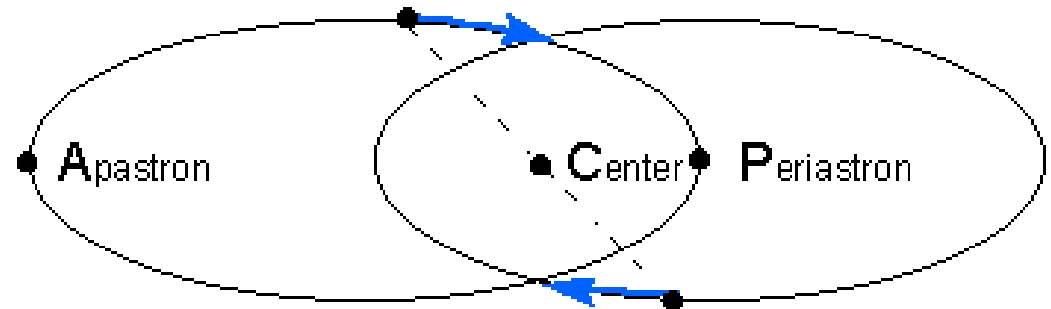
- Misure possibili con esperimenti a terra (difficili, ma possibili)
- Oppure : **Nane Bianche** (oggetti molto compatti; massa circa massa del Sole, raggio paragonabile a raggio terrestre), perchè hanno un forte campo gravitazionale
- Meglio ancora: **Stelle di Neutroni** e **Pulsars** (massa circa massa del Sole, raggio di soli 10-100 km), perchè hanno un campo gravitazionale ancora più forte

# Test 4: pulsar binaria PSR 1913+16

- Pulsar:



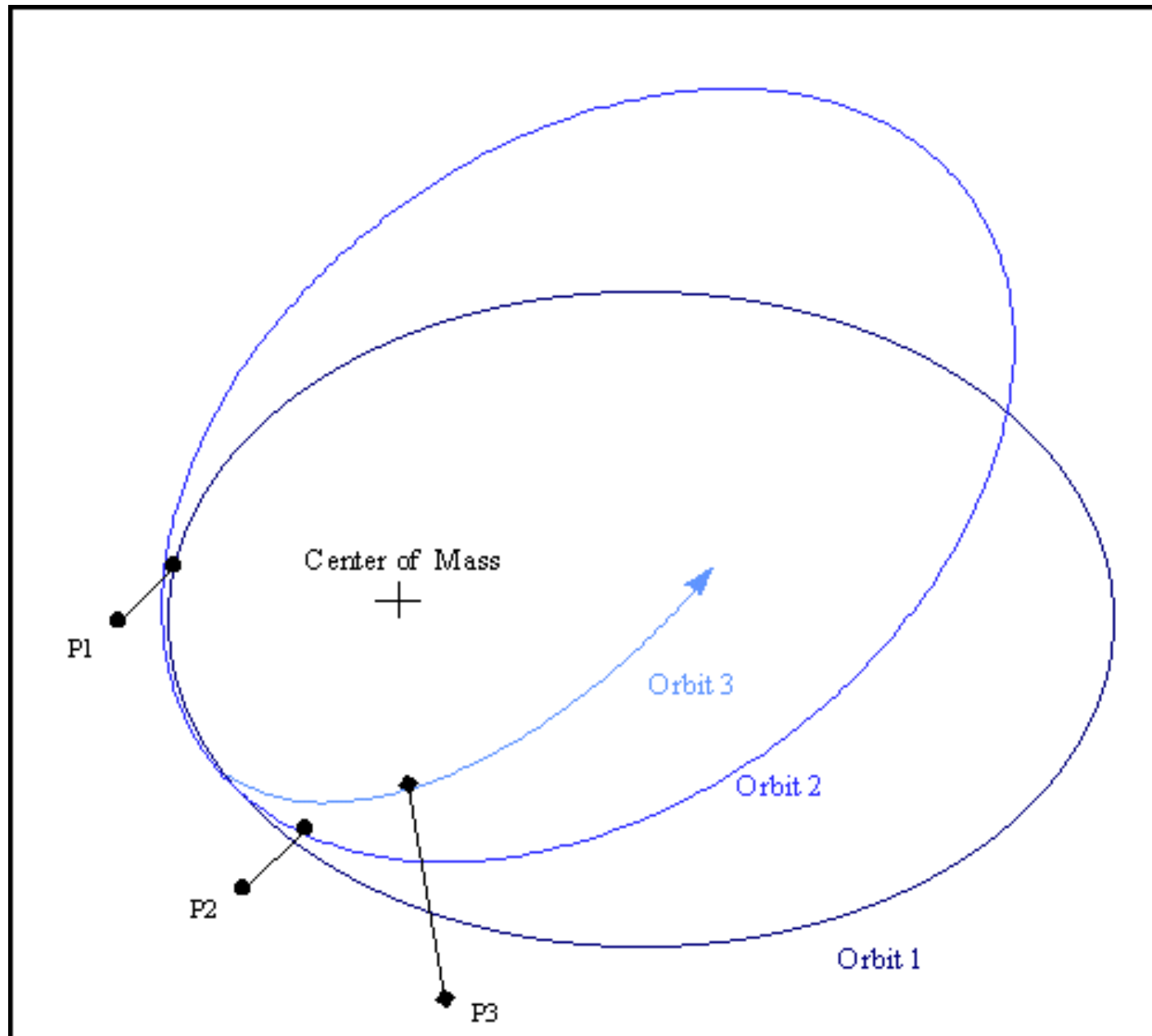
# Orbit of a Binary Pulsar



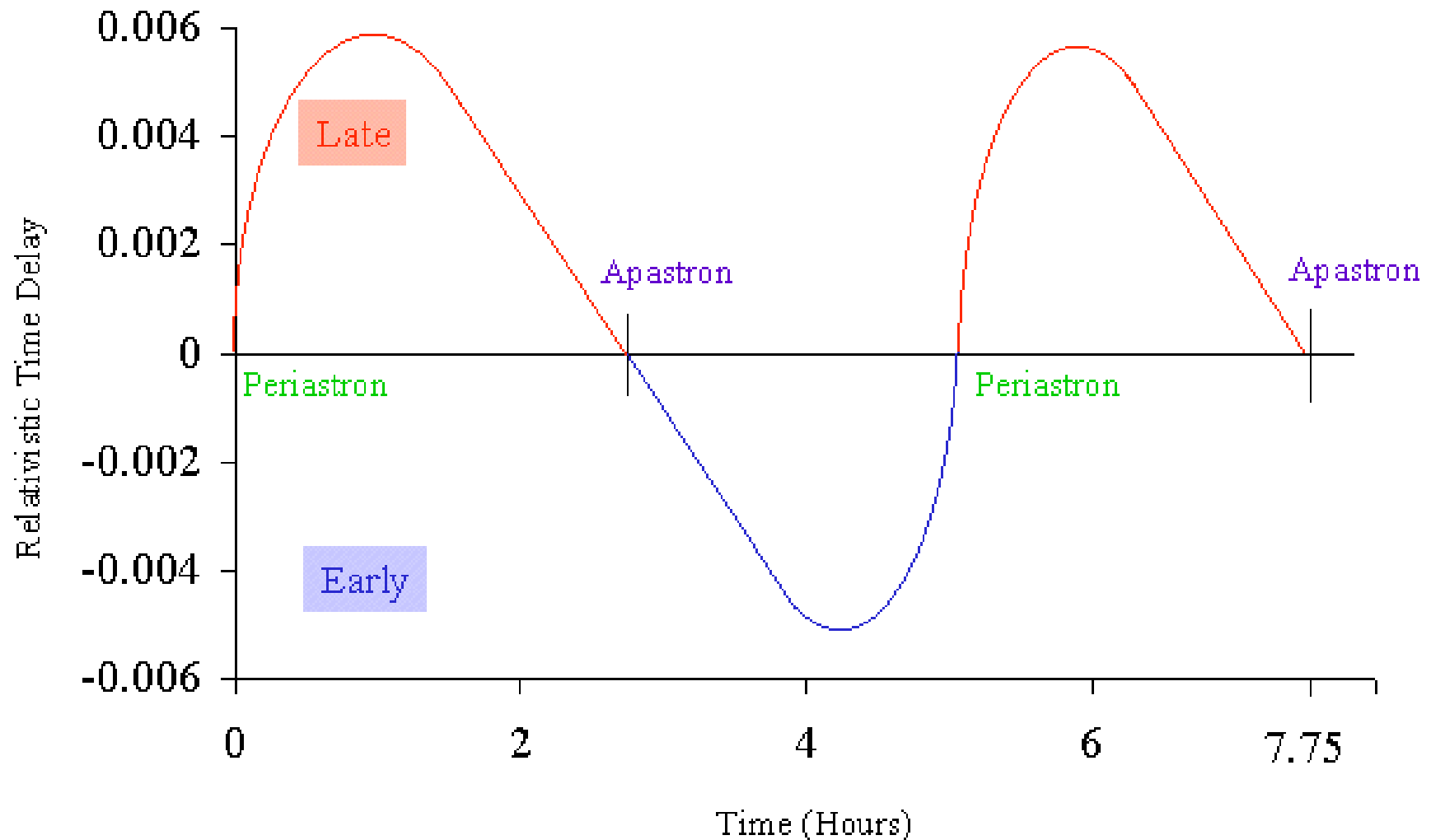
- **Pulsar binaria:** 2 pulsar in orbita tra loro
- Periodo orbitale: 7.75h
- Hulse e Taylor in 1974
- Premio Nobel in fisica (1993)



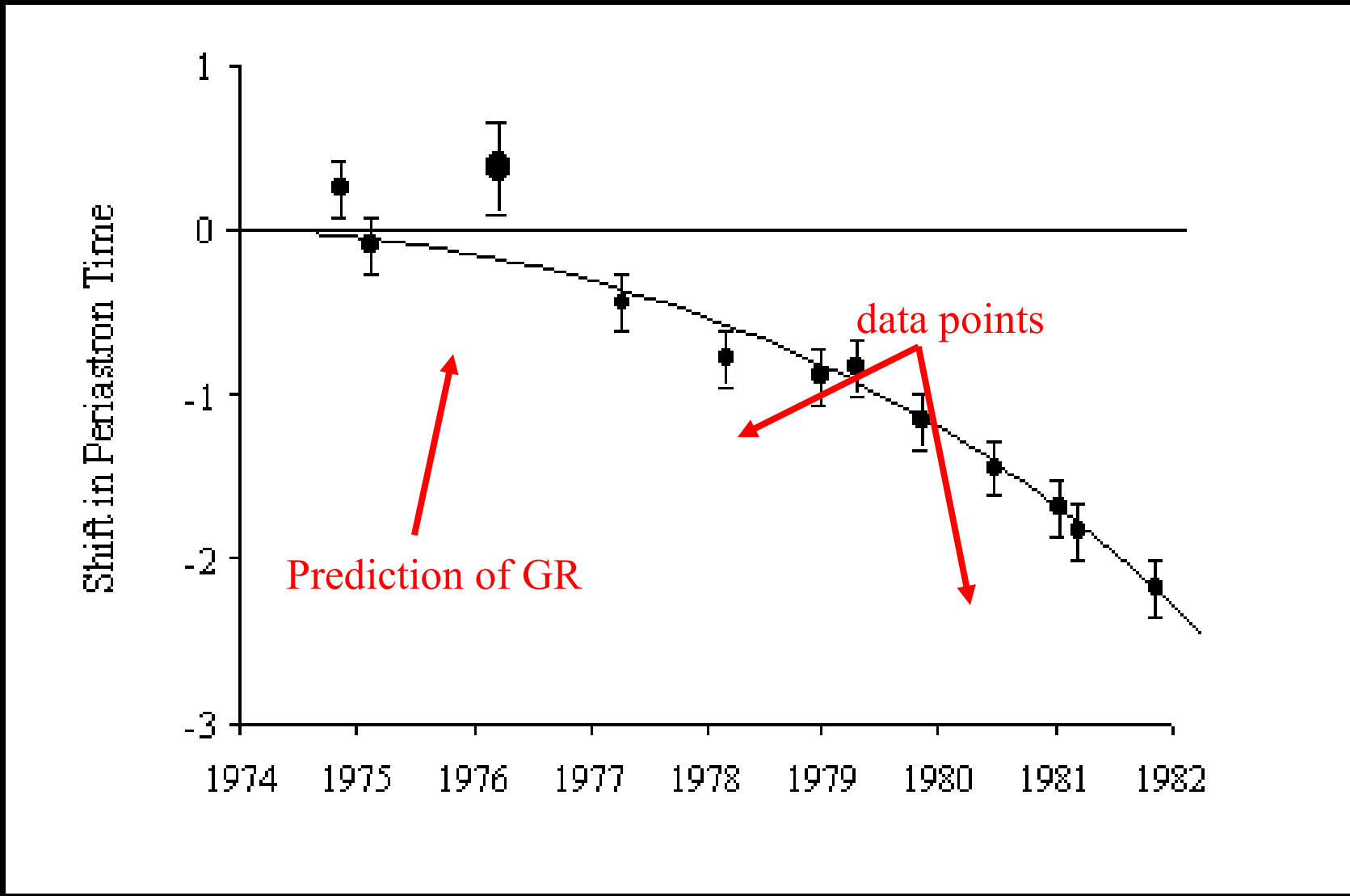
- **Precessione:**  $4.2^\circ$  all'anno



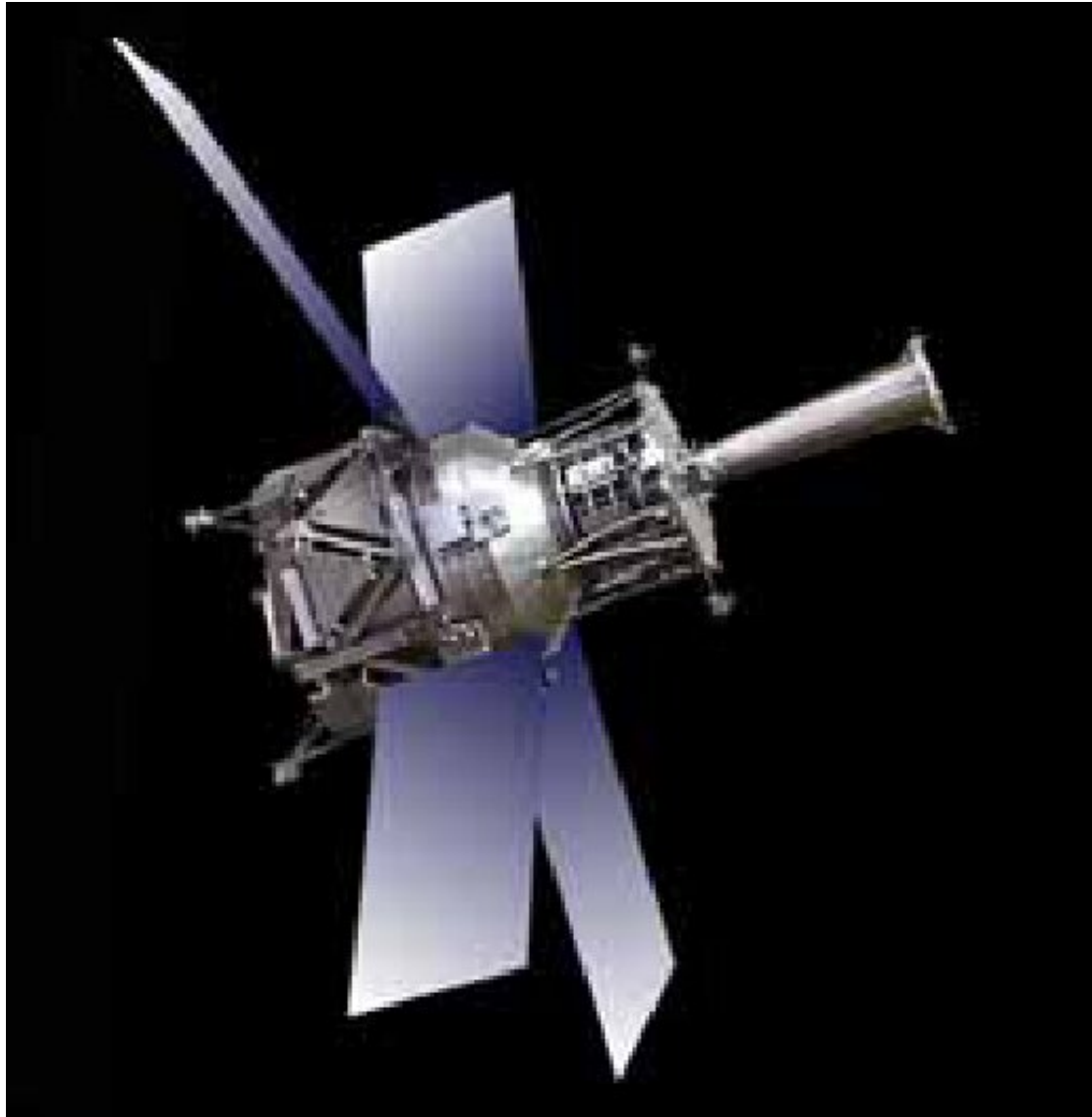
- **Ritardo in tempo:** gli orologi rallentano in un campo gravitazionale forte



- **Onde gravitazionali:** decremento orbitale causato da emissione di radiazione gravitazionale



# Gravity Probe B



# Postulates of Euclidean (flat) geometry:

- It is possible to draw a straight line from any given point to any other point
- A straight line of finite length can be extended indefinitely, still in a straight line
- A circle can be described with any point as its center and any distance as its radius
- All right angles are equal
- Given a line and a point not on the line, only one line can be drawn through that

# Some conclusions:

- The interior angles of a triangle sum to  $180^\circ$
- the circumference of a circle is equal to  $2\pi R$ , where  $R$  is the radius

$\Rightarrow$  space is flat

- but what if we change the fifth postulate ?

# Postulates of spherical geometry:

- It is possible to draw a straight line from any given point to any other point
- A straight line of finite length can be extended indefinitely, still in a straight line
- A circle can be described with any point as its center and any distance as its radius
- All right angles are equal
- Given a line and a point not on the line, no line can be drawn through that point

# Postulates of hyperbolic geometry:

- It is possible to draw a straight line from any given point to any other point
- A straight line of finite length can be extended indefinitely, still in a straight line
- A circle can be described with any point as its center and any distance as its radius
- All right angles are equal
- Given a line and a point not on the line, an infinite number of parallel lines can



# The metric equation

- Distance between two points (flat space)

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$$

- Distance between two points (curved space)

$$\Delta s^2 = f\Delta x^2 + 2g\Delta x\Delta y + h\Delta y^2$$

- $f, g, h$ : metric coefficients

# Example: distance between two points at the surface of the Earth

- Coordinate differences:  $\Delta\phi$ ,  $\Delta\vartheta$
- naïve, but false:

$$\Delta s^2 = \Delta\phi^2 + \Delta\vartheta^2$$

- correct:

$$\Delta s^2 = R^2 \Delta\vartheta^2 + R^2 \cos^2\vartheta \Delta\phi^2$$

- metric coefficients:  $f=R^2$ ,  $h=R^2 \cos^2\vartheta$

# Spacetime

- Fourth coordinate:  $ct$
- time coordinate has different sign than spatial coordinates
- spacetime distance:

$$\Delta s^2 = \alpha c^2 \Delta t^2 - \beta c \Delta t \Delta x - \gamma \Delta x^2$$

$\forall \alpha, \beta, \gamma$ : metric coefficients