LA QUESTIONE DEI FONDAMENTI: DALLA METALOGICA ALLA METAFISICA

Appunti ad Uso degli Studenti

Roma 2004

1. Premessa

1.1. Bibliografia

- Testi fondamentali:

  - G. BASTI & A. L. PERRONE, *Le radici forti del pensiero debole. Dalla metafisica, alla matematica, al calcolo*, Il Poligrafo e Pontificia Università Lateranense, Padova-Roma, 1996;
  - J. BOCHENSKI, *La logica formale*, voll. I-II, Einaudi, Torino, 1972^3 (traduzione nelle varie lingue);
  - E. NAGEL & J.R. NEWMAN, *La prova di Gödel*, Boringhieri, Milano, 1992^2 (traduzione nelle varie lingue);
  - C. CELLUCCI, *Le ragioni della logica*, Laterza, Roma–Bari, 1998 (2000^2).
  - COCCHIARELLA N.B. Logic and ontology, *Axiomathes* **12**(2001): 117–150.
  - HALLETT M ., *Cantorian set theory and limitation of size*, Oxford University Press, Oxford 1998 (reprint).

1.2. Schema del corso

- Si divide in tre parti:
  1. Accenni alla **teoria dei fondamenti:** dalla scoperta delle antinomie ai teoremi di Gödel
  2. Accenni alla **teoria del significato:** logiche estensionali ed intensionali
  3. Accenni alla **teoria dell'essere:** dalla logica formale all'ontologia formale
- Nella discussione delle varie parti e delle varie leggi logiche e ontologiche, speciale attenzione sarà dedicata alla loro rilevanza per questioni **scientifiche, metafisiche e teologiche**.

2. I sistemi formali

2.1. Caratterizzazione dei sistemi formali

♦ LINGUAGGIO FORMALE (O TEORIA FORMALE). Con linguaggio o teoria formale si intende nella logica moderna un linguaggio costruito in maniera non ambigua, ovvero un *sistema formale* (v.) per il quale è fornita un'*interpretazione* (v.). Si tratta cioè di un linguaggio in cui i termini e/o le proposizioni che appartengono a tale linguaggio sono tutti rigorosamente *dichiarati*, o *definiti*, o *dimostrati*, man mano che vengono aggiunti al linguaggio stesso.
In particolare, in tale linguaggio devono essere innanzitutto *dichiarati* quelli che sono i *primitivi* di quel linguaggio, ovvero termini e proposizioni elementari (soggetto - predicato) che non vengono rigorosamente definiti all'interno del linguaggio, ma che si suppongono conosciuti, visto che saranno usati per costruire le successive definizioni.
Ciò che caratterizza un linguaggio formalizzato sono poi le *proposizioni - base* di esso:

1) Fra di esse, innanzitutto, vi sono gli *assiomi*, proposizioni non dimostrate entro quel linguaggio da cui formare per dimostrazione successive proposizioni. Essenziale per la rigorosa costruzione di un linguaggio formalizzato è che i suoi assiomi siano in numero finito, che sia dimostrabile la loro reciproca non - contraddittorietà e che siano effettivamente tali, ovvero non deducibili dagli altri assiomi del linguaggio.

2) Altro tipo di proposizioni - base sono le *definizioni* dei termini e delle operazioni usati per tali dimostrazioni.

3) Vi sono poi le *regole di definizione*, mediante cui le definizioni so costruite a partire dai termini primitivi

4) Vi sono infine le *regole di inferenza* mediante cui altre proposizioni verranno successivamente e non ambiguamente dimostrate a partire dagli assiomi e dalle definizioni.

Tutte le altre proposizioni costruite a partire dalle *proposizioni-base* costituiranno così altrettanti *teoremi* di quel linguaggio.

♦ SISTEMA FORMALE (O CALCOLO FORMALE). Sistema simbolico senza *interpretazione* (v.), la cui *sintassi* è definita in un modo rigoroso e sul quale è definita una relazione di *deducibilità* (v.) in termini puramente sintattici. Come i *linguaggi formali* (v.), d'altra parte, i S.F. sono costituiti da *termini primitivi*, *definizioni*, *assiomi*, *regole d'inferenza* e *teoremi*. In particolare, gli unici «significati» ammessi per i termini primitivi di un S.F. sono quelli determinati dal loro uso all'interno degli assiomi del sistema. In questo senso si dice che i «primitivi» «soddisfano» i relativi assiomi.

- P.es., un primitivo dell'aritmetica è la regola di successione $n + 1$ senza di cui alcuna teoria scientifica dell'aritmetica è pensabile.
- Il significato di questo primitivo entro il *sistema formale* di Peano una cui interpretazione è l'aritmetica ordinaria è *l'assioma del successore*: $S(x + y) = Sx + y$ [p.es.: $S(4 + 7) = S4 + 7 = S11 = 5 + 7 = 12$].
- L'incompletezza (*v.*), dimostrata da Gödel del sistema formale di Peano e/o di qualsiasi altro sistema formale in grado di includere l'aritmetica significa che l'aritmetica può avere un'infinità di altre possibili formalizzazioni → potenza della logica e matematica post-moderne.

- ♦ INTERPRETAZIONE. Attribuzione di significato ai termini di un *sistema formale* (v.). Ovvero un'attribuzione di *denotazione* a un termine o all'*estensione* (v.) di un predicato in un *sistema formale* in modo che le *fbf* (v.) del sistema hanno un valore di verità nell'interpretazione.
- ♦ DEDUCIBILITÀ: Proprietà di una formula di poter essere dedotta come conclusione di un argomento valido, all'interno di un dato sistema formale.
- ♦ DEDUZIONE: Procedura tipica della matematica e della logica nella quale una formula *ben formata* (v.) di un determinato sistema formale segue necessariamente dalla premesse poste. Tale conclusione quindi non può essere falsa quando le premesse sono vere.
- ♦ BEN FORMATA (di una frase, di una formula o di un'espressione, etc.). Costruita in modo da essere *grammaticalmente corretta.* Nei sistemi e nei linguaggi formali: formula ben formata (fbf) è la formula costruita seguendo le regole di formazione (definizione e inferenza) o regole della *sintassi* di quel linguaggio o sistema formale.
- ♦ MODELLO. Un'*interpretazione* (v.) di un *sistema formale* rispetto alla quale i *teoremi* derivabili in tale sistema sono *veri.* Ovvero, una parte di un determinato *linguaggio formale* (v.) o *teoria formale* che riflette qualche aspetto di un fenomeno, o di un

processo fisico, sociale o tecnologico e che permette di fare previsioni rispetto a quello. In tale senso ogni *teoria scientifica applicata* allo studio di un qualche oggetto del mondo fisico o umano, in quanto teoria o linguaggio formale, è un M. di un soggiacente *sistema formale* (v.). P.es., *l'aritmetica* in quanto teoria scientifica dei numeri naturali è un M. del sistema formale basato sui cinque assiomi di Peano.

2.2.Proprietà dei sistemi formali

2.2.1. Consistenza

- ♦ CONSISTENZA (DEI LINGUAGGI FORMALI): Un linguaggio formale si dice consistente se non contiene formule contraddittorie, ovvero quando non si da il caso che una delle sue formule e la sua negazione siano costruibili (se definizioni) o dimostrabili (se teoremi) in esso.

2.2.2. Completezza

- ♦ COMPLETEZZA (DEI LINGUAGGI FORMALI): Con C. di un linguaggio formale o di un sistema formale si intende quella proprietà per cui tale sistema è sufficiente per decidere di ogni proposizione correttamente costruita (p. es., coerentemente dedotta) e/o formulata a partire dalle proposizioni - base (primitivi, assiomi, regole di inferenza) di quel linguaggio. In altri termini, C. di un sistema assiomatico consistente significa che dev'essere possibile dimostrare in quel sistema ogni formula dimostrabile o la sua negazione. Così, per poter accertare effettivamente la C. di un linguaggio formale è indispensabile poter garantire che tutte le proposizioni correttamente costruite all'interno di quel linguaggio godano della proprietà della *decidibilità*.

2.2.3. Decidibilità

♦ DECIDIBILITÀ: Un enunciato formulabile all'interno di un dato sistema formale si dice decidibile se è dimostrabile come vero o falso all'interno di tale sistema.

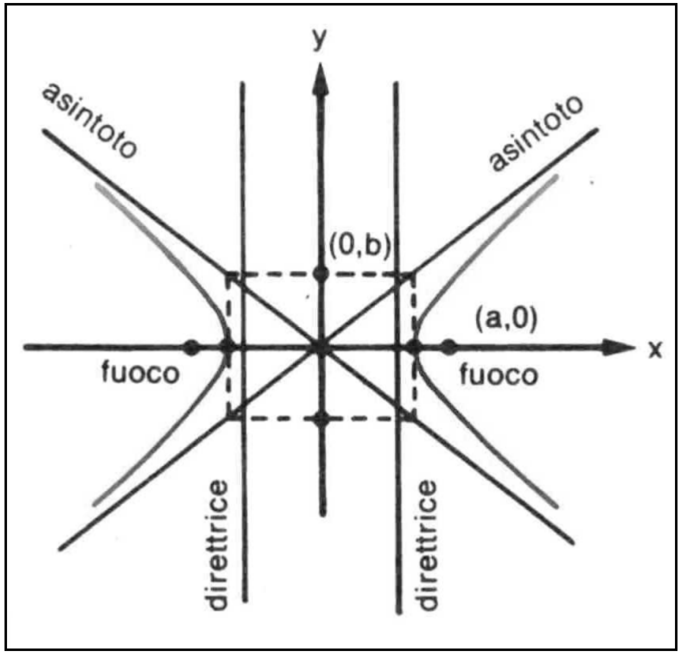
3. Teoria dei fondamenti

3.1. Metodi finitari e non finitari

3.1.1. La crisi del principio di evidenza

- Nascita delle **geometrie non-euclidee** nella prima metà dell'800 → **assiomatizzazione** delle matematiche → natura **ipotetica** vs. **apodittica** delle teorie matematiche (= non basate su assiomi necessariamente **veri**) → **crisi del principio cartesiano di evidenza** come fondamento della nozione moderna di scienza.

- Natura problematica del V Postulato di Euclide («date due rette, ed una terza intersecante le prime due, queste s'incontrano nella direzione in cui la somma degli angoli dell'intersezione è minore di due retti») fin dall'antichità per la scoperta di linee (asintoti) che al finito non s'incontrano, mentre all'infinito sì.



Iperbole nella forma canonica $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$, ovvero curva piana che si definisce come luogo dei punti per i quali è costante la differenza delle distanze da due determinati punti definiti come i *fuochi* dell'iperbole. Si noterà dalla figura come i bracci dell'iperbole si sovrappongano solo all'infinito con i rispettivi asintoti. Solo all'infinito infatti la differenza delle distanze dai fuochi sarà uguale a zero.

- ♦ → Tentativo nell'età moderna di **dimostrare** il quinto postulato come derivato dagli altri quattro → fallimento di tale tentativo — soprattutto quello di Girolamo Saccheri (1667-1733) che aveva cercato di dimostrarlo per assurdo — → convinzione della possibilità di una geometria coerente senza il V Postulato (Friedrich Gauss (1777-1855)).
- ♦ → Successo di questo tentativo nel 1829 da parte di Nicolaj Ivanovic Lobacevskji (1793-1856) e nel 1832 da parte di Janos Bolyai (1802-1860).
- ♦ → Fine del mito dell'evidenza e nascita del **metodo ipotetico-deduttivo** come metodo della scienza matematica e di tutte le scienze moderne (la vittoria di Bellarmino!!!).

  «La convinzione tradizionale che gli assiomi della geometria (o gli assiomi di qualunque sistema) possano essere provati dalla loro apparente autoevidenza, fu così radicalmente distrutta. Inoltre, poco alla volta risultò chiaro che il vero compito del matematico puro è quello **di derivare teoremi da ipotesi postulate**, senza che debba preoccuparsi come matematico di decidere se gli assiomi introdotti siano di fatto **veri** » (Nagel & Newman 1993, 21).

«Lobacevskji viene considerato “il Copernico della geometria” come colui che ha rivoluzionato questo campo della matematica creando un’intera branca completamente nuova (…) mostrando **come la geometria euclidea non fosse quella scienza esatta depositaria di verità assolute quale era stata quella precedentemente considerata**. In un certo senso, possiamo affermare che la scoperta della geometria non-euclidea inferse un colpo mortale alla filosofia kantiana, paragonabile alle conseguenze che la scoperta delle grandezze incommensurabili ebbe per il pensiero pitagorico (Cfr. sopra § **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**). L’opera di Lobacevskji rese necessario **modificare radicalmente le concezioni fondamentali circa la natura della matematica**» (Boyer 1968, 621s. Corsivi nostri).

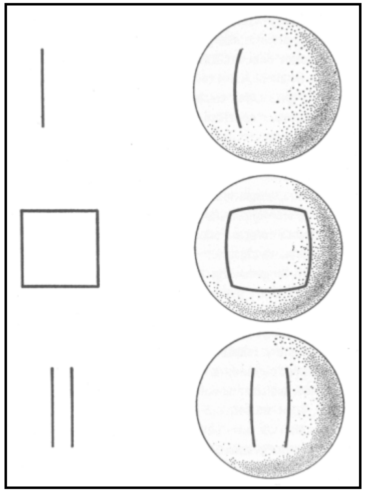
- Sistematizzazione e generalizzazione del risultato nel 1854 da parte di Bernhard Riemann (1826-1866) con la proposizione di una nuova geometria non-euclidea ellittica (non iperbolica come le due precedenti).

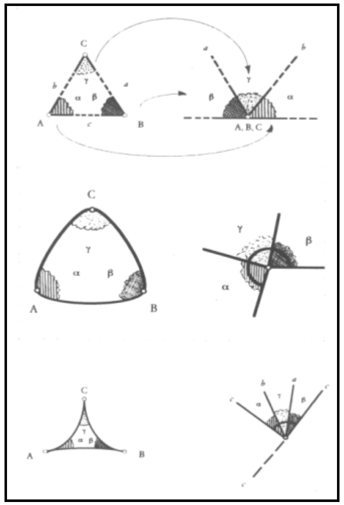
«Con Riemann la geometria (e quindi tutto il resto della matematica) viene completamente **assiomatizzata**. Non solo i postulati di qualsiasi scienza non vanno presi **mai** come verità assolute, bensì solo come **ipotesi**, ma — almeno in branche delle scienza come la matematica "pura" — è lo stesso **contenuto descrittivo dei primitivi e degli assiomi** — e quindi dell'intero sistema assiomatico da essi derivato — a dover essere abbandonato. Con Riemann la scienza matematica abbandona, per la prima volta nella storia del pensiero, ogni contenuto denotativo di oggetti — i cosiddetti "enti matematici" cari alla tradizione pitagorico–platonica —, per divenire pura scienza di **relazioni sintattiche fra simboli** del linguaggio matematico» (Basti 2002).

«Di fatto si riconobbe che la validità della deduzione matematica non dipende in alcuna maniera dal particolare significato che può essere associato ai termini o alle espressioni contenute nei postulati. Si vide così che la matematica è molto più astratta e formale di quanto non si supponesse tradizionalmente: più astratta perché, in linea di principio **si possono fare affermazioni matematiche su cose assolutamente qualsiasi**, anziché su insiemi intrinsecamente circoscritti di oggetti o di proprietà di oggetti (le proprietà quantitative, *N.d.R.*), perché la validità delle dimostrazioni matematiche **riposa sulla struttura delle affermazioni, piuttosto che sulla natura particolare del loro contenuto.** (…) Ripetiamo che l'unica questione riguardante il matematico puro (in quanto distinto dallo scienziato che usa la matematica per studiare un oggetto particolare) non è se i postulati che egli ammette o le conclusioni che egli trae dai primi sono veri, ma se le conclusioni avanzate siano, di fatto, **le conclusioni logiche necessarie** delle ipotesi da cui è partito (…). Fintantoché abbiamo a che fare col compito essenzialmente matematico di esplorare le relazioni puramente logiche di dipendenza tra le varie affermazioni, i significati familiari dei termini primitivi (i termini con cui sono costruiti gli assiomi di partenza, *N.d.R.*) devono essere ignorati e gli unici "significati" associati ad essi sono quelli assegnati dagli assiomi in cui entrano. Questo è il significato del famoso epigramma di Russell: la matematica pura è quella scienza in cui non sappiamo di cosa stiamo parlando o se ciò che stiamo dicendo è vero (Nagel & Newman 1993, 23s.).

3.1.2. La scoperta delle antinomie logiche

- ♦ **Problema:** come provare la **coerenza** dei sistemi assiomatici, una volta che non si suppone più la **verità** dei postulati?
- ♦ Riemann tentò una dimostrazione della **consistenza** della sua geometria non-euclidea ellittica (estesa da Eugenio Beltrami (1835-1900) anche alla geometria iperbolica di Lobacevskji) costruendone un **modello euclideo** come **geometria dello spazio curvo** → se è coerente la geometria euclidea sono coerenti anche le non–euclidee → **dimostrazione non-finitaria** che fa appello di nuovo **all'evidenza.**





- ♦ Sebbene questa dimostrazione servì molto alla diffusione delle nuove teorie perché le rese di facile fruibilità almeno intuitiva, essa **gravemente insufficiente** perché faceva appello all'evidenza nella quale si era persa fiducia.
- ♦ La rivoluzione concettuale della nuova matematica assiomatica → necessità di una **teoria dei fondamenti delle matematiche.**

Teoria degli insiemi di Cantor e la scoperta delle antinomie

- ♦ → Tentativo di Georg Cantor (1845-1918) di una fondazione **costruttiva** degli "ingredienti" fondamentali della matematica (nozioni di "numero", "figura", "funzione", "continuo"…) a partire dalla nozione elementare di **insieme,** usando perciò **metodi finitari (ricorsivi)** di dimostrazione della consistenza di tali nozioni.
- ♦ Definizione costruttiva della nozione di insieme come **sottoinsieme del suo insieme-potenza:**
  - ➢ P.es., dato un insieme *A* di quattro elementi {a, b, c, d}, esso può essere considerato come sottoinsieme dell'insieme-potenza di *A*, $\wp A$, composto di sedici

elementi. $\wp A$ sarà composto cioè da sottoinsiemi costituiti da tutte le combinazioni possibili degli elementi di *A*: nessuno, a uno a uno, a due a due, a tre a tre, e, infine, a quattro a quattro, cioè *A*: {{∅}, {a}, {b}, {c}, {d}, {a,b}, {a,c},{a,d}, {b,c}, {b,d}, {c,d}, {a,b,c}, {a,b,d}, {a,c,d}, {b,c,d}, {a,b,c,d}}, in totale 16 elementi. In generale, dunque, la "«potenza"» o "«cardinalità"» (il numero cardinale di elementi) di un insieme–potenza di un altro insieme con cardinalità *n* , sarà 2^n.

- ♦ → Trattabilità **attuale** degli stessi insiemi **infiniti** → dimostrazione dell'**equipotenza** dell'insieme dei **numeri razionali** $\mathbb{Q}$**,** dei **naturali** $\mathbb{N}$, dei **relativi** $\mathbb{Z}$… tutti con la medesima potenza del **numerabile** (= possono essere messi in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$), simbolizzata con $\aleph_0$. → Paradosso: **l'insieme di tutti i numerabili è numerabile.**
- ♦ → Definizione della nozione di **insieme infinito** come insieme che può essere messo in corrispondenza biunivoca con una **sua parte propria**.

♦ → Dimostrazione della **non numerabilità** dell'insieme dei **numeri reali** e quindi della **non-costruibilità del continuo matematico.**

♦ → **Ipotesi del continuo**: come insieme di potenza immediatamente successiva al numerabile con cardinalità $2^{\aleph_0}$.

♦ → **Triplice definizione dell'infinito** (= recupero della distinzione scolastica fra **potenziale, virtuale e attuale** contro la dicotomia aristotelica fra potenziale e attuale):

1. **Infinito potenziale:** indeterminato ed incrementabile
2. **Infinito attuale transfinito:** determinato e incrementabile
3. **Infinito attuale assoluto:** determinato e non-incrementabile (=Dio).

♦ → Possibilità di **costruzione indefinita** mediante **i numeri ordinali** (I, II, III…) di **diversi ordini di transfinito:**

$\omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega, \ldots \omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}}$ estendendo così enormemente, al di là dell'immaginabile, il regno degli enti matematici (= «Paradiso di Cantor»), dato il fatto che anche solo il **transfinito ordinale** del prim'ordine ω contiene entro di sé tutta la potenza del numerabile.

- → Scoperta delle **antinomie** riguardo agli insiemi **onnicomprensivi** come la nozione di **insieme universale** o la nozione di **insieme massimale** come chiusura della successione infinita dei transfiniti.

Antinomia di Russell

- Di ben maggiore risonanza culturale — sebbene equivalente a quella di Cantor — fu la scoperta ad opera di Bertrand Russell (1872-1970) nel 1902 dell'antinomia che porta il suo nome perché legata al fallimento del tentativo di una teoria **logicista** dei fondamenti ad opera di G. Frege.
- Risonanza dovuta alla fama dei personaggi, ma soprattutto al fatto che l'antinomia era stata scoperta entro la più generale **teoria delle classi** e non entro la teoria degli insiemi di Cantor, rilevante per la sola matematica.

- ➔ Consapevolezza del carattere **logico** e **sintattico** delle antinomie (riguardavano cioè **l'intera logica formale**, almeno nell'interpretazione estensionale del calcolo dei predicati come logica delle classi) *vs*. idea finora invalsa che le antinomie fossero solo **semantiche** come la classica "antinomia del mentitore".

- Tentativo **logicista** di Frege (= **verità** come fondamento della **coerenza**) basato su un **assioma generalizzato di astrazione** di tipo **intensionale** (= proprietà e predicati fondamento delle classi)**:** data una **proprietà** e il **predicato** che la esprime linguisticamente è costituita anche la sua **estensione**, ovvero la classe degli elementi che **soddisfano** il predicato**,** che cioè lo rendono **vero**.

- Nell'assiomatizzazione della teoria di Frege, all'interno della teoria delle classi di Russell sviluppata nei *Principia*, tale assioma sostituito con un **assioma di comprensione** di tipo rigorosamente **estensionale** (= le classi fondamento dei predicati e non viceversa):

$$\exists y \forall x \; x \in y \equiv j\, x$$

- ➔Idea di Frege: se evitiamo di costituire ricorsivamente le collezioni come per gli insiemi di Cantor, evitiamo le antinomie → **definizione di numero** non come insieme ma come **classe di classi** (p.es., “0” come “classe di tutte le classi vuote”; “1” come “classe di tutte le classi di un solo elemento”; “2” come “classe di tutte le classi di due elementi”, etc.).
- ➔ Distinzione fra **classi normali** (che non si **autocontengono**: p.es. “uomo” inteso come predicato che definisce la “classe degli umani” **non è uomo**) e **classi non-normali** (che si autocontengono: p.es. “polisillabo” inteso come predicato che definisce la “classe dei polisillabi” **è polisillabo**).
- ➔ Antinomia di Russell: impossibilità di una definizione consistente di classe totale di classi normali (p.es., la classe di tutti i numeri). Infatti, basta domandarsi: la **classe totale** di tutte le classi normali è normale o no? Ovvero: la classe di tutte le classi che *non* contengono se stesse, conterrà o no se stessa?
  - Se *contiene* se stessa, allora *non contiene* se stessa — perché per definizione può contenere tutte e sole classi che *non* si auto–contengono.

- Se *non contiene* se stessa, allora *contiene* se stessa — perché, sempre per definizione, deve contenere *tutte e sole* classi che non si auto–contengono.
- Dunque: se è *si* allora è *no*, se è *no* allora è *sì*: **antinomia**.

♦ Henri Poincaré (neo–intuizionista ed anti–formalista): «il formalismo in logica si è finalmente dimostrato fecondo: ha generato le antinomie!»

3.1.3. La soluzione assiomatica delle antinomie

♦ Soluzione generalizzata di tutte le antinomie logiche sintattiche: **limitare le dimensioni** delle totalità (insiemi, classi,…) **costruibili** (Hallett 1984).

♦ ➔ **Nella teoria delle classi**:

- Necessità di applicare il cosiddetto **principio della teoria generale dei tipi logici: «**per evitare antinomie, occorre che le proposizioni di un certo linguaggio formale siano costruite con predicati che, quando hanno per argomento delle **totalità infinite di elementi** (p.es., predicati con variabili legate da un quantificatore universale: “per tutti”), questi elementi appartengano a **un tipo logico inferiore»**.

- Ovvero **non sono ammissibili collezioni** che contengono elementi che possono essere definiti come esistenti solo **supponendo la totalità della collezione stessa** (principio del circolo vizioso in definizioni **impredicative**).
- Analogo nelle logiche intensionali: **principio dei gradi semantici** (Husserl)
- ➔ **Teoria dei tipi ramificata** di Russell mediante il discutibile **assioma di riducibilità,** attraverso cui ordinare gerarchicamente i tipi logici.
- ➔ **Teoria dei tipi semplici** di Frank Plumpton Ramsey (1903-1930), che è la soluzione generalmente accettata in logica delle classi, che evita i problemi della teoria dei tipi di Russell mediante opportuni **assiomi di esistenza** per ciascuno degli elementi individui (*Ur-element*) di un dato sistema formale → pesanti **analisi di consistenza** di ciascuno di tali sistemi.

♦ Nelle **teorie degli insiemi:**

- Evitare l’antinomia di Cantor mediante **definizioni non costruttive (assiomatiche) degli insiemi «troppo infiniti»** (= con la cardinalità di *V*, la collezione universale)

- → **Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel (ZF):** garantire il **buon ordinamento** degli insiemi mediante il cosiddetto **assioma di scelta (AC).**
- → **Teoria degli insiemi di Von Neumann-Gödel-Bernays (NGB): assioma dell'insieme-potenza** (von Neumann) per distinguere **due classi di insiemi:** gli insiemi ordinari costruibili e gli insiemi-potenza non costruibili.
- → **Teoria degli insiemi generici di P.J. Cohen (1965):** grazie alla dimostrazione dell'indipendenza di AC dall'ipotesi del continuo, possibilità di supporre che fra $\aleph_0$ (= potenza del numerabile) e $2^{\aleph_0}$ esistano molteplici (infinite) potenze del continuo: $\aleph_1, \aleph_2, ..., \aleph_{\aleph_0}, \aleph_{\aleph_1}, ...$ → indebolimento della **relazione insiemistica di inclusione** → della **relazione logica di implicazione** → teoria del **forcing** (una data premessa non implica, ma solo "forza" una data conclusione).

3.1.4. Il programma formalista di Hilbert

- Assiomatizzazione delle matematiche e della stessa teoria dei fondamenti → **perdita dell'unità** della matematica → **teoria formalista dei fondamenti** di David Hilbert (1862-1943).
- Punto di partenza: assiomatizzazione della geometria euclidea (*Fondamenti della geometria*, 1889) → indipendenza della geometria pura dai numeri, mostrando che tutta la geometria piana (euclidea) può essere rappresentata come una particolare, astratta struttura algebrica detta **campo commutativo**.
  → Così centro della sua opera sui fondamenti della geometria euclidea fu la dimostrazione che la **geometria analitica** non ha alcun bisogno di supporre l'esistenza di numeri per giustificare l'uso dell'algebra al suo interno. Un risultato questo che riprendeva e confermava, applicandola alla geometria euclidea, il risultato già ottenuto da Riemann con le geometrie non–euclidee.
- Analisi della consistenza della geometria → distinzione fra **matematica metamatematica** attraverso identificazione di tre passi nella costruzione di una teoria:

- Una teoria matematica *informale* e intuitiva ;
- Una *formalizzazione* di tale teoria (includente una logica sufficiente);
- Lo studio *metamatematico* della consistenza di tale formalizzazione .

♦ → Critica a Frege per la mancanza della suddetta distinzione fra teoria e metateoria come radice del suo fallimento. Inversione della relazione fregeana fra esistenza dell'oggetto → verità degli assiomi che ad esso si riferiscono → coerenza dei medesimi. → Polemica Frege-Hilbert:

♦ **Frege: «** vi sono forse altri modi per provare la consistenza (di un sistema di assiomi, *N.d.R.*) che quello di esibire un oggetto che gode di tutte le proprietà (definite dagli assiomi: di nuovo il principio di evidenza, *N.d.R.*)? Comunque, se si ha a disposizione un tale oggetto, non si ha alcuna necessità di provarne l'esistenza mediante la via tortuosa di provare la consistenza di tale oggetto».

♦ **Hilbert:** «E' proprio questa procedura di costruire un assioma facendo appello alla sua verità e di concludere da questo che è compatibile con gli altri concetti definiti, che si trova la sorgente primaria di errori e confusioni (…) Viceversa, se gli assiomi *arbitrariamente posti* non si contraddicono l'un l'altro, allora essi sono *veri* ed *esistono* gli oggetti definiti per mezzo di essi. Per me è questo il criterio della verità e dell'esistenza».

- → **supposizione di completezza** di tutti i sistemi assiomatici.
- In altri termini, se mediante un sistema di assiomi s'intende definire in maniera **univoca e completa** le proprietà degli oggetti "primitivi" che appartengono ad un determinato sistema formale (p.es., punti, rette e piani in geometria euclidea), sarebbe assurdo pretendere di aggiungere altri elementi a quel sistema non derivabili da quegli assiomi (p.es. un triangolo la cui somma degli angoli interni > 180°), ed allo stesso tempo mantenere che essi non entrino in contraddizione con gli assiomi stessi.
- Applicazione alla dimostrazione **indiretta** della consistenza degli assiomi della geometria costruendo un **modello sintattico** di essa definito sui numeri reali.
  - In tale modello, tutti gli assiomi della geometria piana divengono proposizioni riguardanti i numeri reali, cioè equazioni o sistemi di equazioni che sono dimostrabili algebricamente.

- Così però non si è dimostrato che tali assiomi sono "assolutamente" **veri**, bensì semplicemente che **sono dimostrabili nella teoria dei numeri reali**. La verità (consistenza) di questi assiomi e dei teoremi da essi derivabili è così una verità solo **relativa**.
- Supposta la non contraddittorietà della teoria dei numeri reali, allora sono non contraddittorie anche tutte le proposizioni **isomorfe** (corrispondenti biunivocamente) a proposizioni costruite su *n*-ple (coppie, terne, etc.) di numeri reali e sulle loro relazioni, come per esempio gli assiomi della geometria.
- Si noti la differenza con Riemann: egli aveva costruito un **modello semantico** della geometria non–euclidea in una geometria euclidea dello spazio curvo. Hilbert costruisce a sua volta un **modello sintattico** della geometria euclidea nella teoria dei numeri reali (algebrici), che prescinde dal riferimento ai numeri in quanto tali, bensì afferma solo la corrispondenza fra **strutture algebriche** di questi numeri e **strutture geometriche**.

♦ ➔ **Programma formalista di Hilbert:** possibilità di una **dimostrazione assoluta** di consistenza nella matematica se fosse stato possibile:

1. da una parte, usare l’aritmetica formale, estesa ai reali, come **metalinguaggio** per **provare algoritmicamente** la consistenza delle altre teorie matematiche;
2. dall’altra **provare algoritmicamente** la consistenza dell’aritmetica **dall’interno dell’aritmetica stessa**, usandola cioè **autoreferenzialmente,** senza cadere in contraddizione.

3.2. Alcuni teoremi di limitazione per i sistemi formali

3.2.1. Teoremi di Gödel

- Fu l’opera geniale di un matematico austriaco, Kurt Gödel (1906-1978) nella prima delle sue opere giovanili (Gödel 1931) a realizzare il suddetto programma di Hilbert nei suoi due punti qualificanti:

1. Dapprima, Gödel inventò un **metodo universale di codifica aritmetica** degli enunciati di un linguaggio formale, abbastanza potente da poter contenere gli stessi assiomi dell’aritmetica formalizzata, l’aritmetica di Peano. In tal modo, ogni enunciato del suddetto linguaggio formale si trasformava in una stringa di numeri, ogni operazione logica su proposizioni in un’operazione su numeri

naturali e ogni teorema in un teorema della teoria elementare sui numeri naturali.

2. In un secondo momento, Gödel si dedicò a **dimostrare la completezza** dell’aritmetica formale stessa usando un siffatto metalinguaggio aritmetico e metodi finiti (algoritmici) di dimostrazione.

- Il risultato fu catastrofico per il programma formalista di Hilbert, ed è sintetizzato nei due famosi **teoremi di incompletezza dell’aritmetica,** di cui diamo qui una formulazione puramente intuitiva, allargata dall’aritmetica formale a tutti i sistemi formali:

- **Primo teorema d’incompletezza**. Ogni sistema formale *S*, sufficientemente potente da includere gli assiomi dell’aritmetica formalizzata di Peano nella formulazione dei *Principia*, se **consistente** sarà necessariamente **incompleto.** Infatti, conterrà necessariamente al suo interno enunciati **veri** (compatibili con gli assiomi), ma **indecidibili,** visto che qualsiasi tentativo di una loro dimostrazione della loro **verità** all’interno della teoria implica la simultanea dimostrazione della loro **negazione**.

- In altri termini, se un sistema formale siffatto vorrà essere **completo** dovrà essere **inconsistente**, perché includerà necessariamente al suo interno teoremi contraddittori. Se viceversa vorrà essere **consistente** dovrà essere **incompleto**, perché dovrà rinunciare a dimostrare tutte le formule vere esprimibili in esso. Dovrà cioè rassegnarsi a contenere enunciati **indecidibili**.
- **Secondo teorema d'incompletezza**. In ogni sistema formale *S*, sufficientemente potente da includere gli assiomi dell'aritmetica formalizzata, l'asserto metalinguistico "«*S* è consistente"» è un enunciato **indecidibile** in tale sistema.
- Come si vede, un siffatto sistema formale *S* non solo non sarà completo, ma non sarà neanche **autoreferenziale**, se vorrà essere **consistente**. In altri termini, un tale sistema se vorrà essere consistente, non solo dovrà essere incompleto, ma anche **sintatticamente "aperto":** la sua prova di consistenza dovrà essere necessariamente **esterna** al linguaggio formale considerato.

4. Teoria del significato

4.1. Logiche estensionali

4.1.1. Teoria estensionale del significato e della verità

- Nell'ambito della logica formale rigorosa o logica simbolica classica (Cfr. § **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**) il **significato delle espressioni** (termini, proposizioni, termini primitivi inclusi) si riduce all'**uso corretto** delle stesse all'interno del sistema formale.
- → Approccio puramente **sintattico** al significato ⇔ termini **privi** di qualsiasi valore **denotativo** di oggetti → validità del sistema per **tutti i mondi possibili**.
- → Attribuzione di un valore denotativo mediante la **costruzione di un modello** o **mondo possibile** di quel sistema formale, mediante la sostituzione di una **variabile terminale,** argomento di un certo predicato ϕ, con un'appropriata **costante individuale,** ovvero con un **simbolo** che denota un **individuo** (o collezione di individui) che goda(no) delle proprietà indicate dal predicato ϕ.

- ♦ → Significato di un termine si riduce alla sua **definizione estensionale** ovvero alla determinazione della collezione di individui ai quali il termine correttamente si applica (= **classe**) → predicati diversi ma **equivalenti** (= definiti sulla medesima classe, p. es., “essere acqua” e “essere H_2O”) hanno **significati identici** (= **assioma di estensionalità**). In pratica, secondo quest’assioma, se due classi sono equivalenti sono identiche: **A º B Þ A = B.**
- ♦ Altri assiomi tipici delle **logiche estensionali** sono:
  1. Quattro **regole di quantificazione** per trasformare proposizioni **atomiche** generalizzate del calcolo dei predicati in proposizioni **molecolari** del calcolo delle proposizioni cui applicare le **regole d’inferenza** relative alle **leggi logiche** del calcolo delle proposizioni per dimostrazioni formali di validità:
     a. $\forall x\, f x \Rightarrow f n$: **Esemplificazione Universale (EU)**
     b. $f y \Rightarrow \forall x\, f x$ **: Generalizzazione Universale (GU)**
     c. $\exists x\, f x \Rightarrow f n$ **: Esemplificazione Esistenziale (EE)** [per $v \neq y$ e senza occorrenze precedenti]
     d. $f v \Rightarrow \exists x\, f x$: **Generalizzazione Esistenziale (GE)**

dove ν è un qualsiasi simbolo individuale e *y* denota un individuo scelto arbitrariamente.

→ Es.(a): $\forall x\, Ux \supset Mx \Rightarrow Ua \supset Ma$ per EU (Se ogni uomo è mortale, allora è vero che, se Antonio è uomo, allora Antonio è mortale).

→ Es.(b): $Uy \supset My \Rightarrow \forall x\, Ux \supset Mx$ per GU (Se un qualsiasi uomo è mortale allora è vero che ogni uomo è mortale).

→ Es. (c): $\exists x\, Ux \cdot Vx \Rightarrow Ua \cdot Va$ per EE (Se esistono degli uomini viziosi, allora è vero che alcuni uomini sono viziosi).

→Es. (d): $Ps \Rightarrow \exists x\, Px$ per GE (Se io penso, allora è vero che esiste qualcosa che pensa).

2. Due **equivalenze** per definire l'uso di quantificatori e consentire la verifica degli argomenti che li utilizzano, posto che essi sono validi *se e solo se* sono validi qualunque sia il numero degli individui esistenti, posto che ne esista almeno uno.
   a. $\forall x\, f x \equiv \left(f a \cdot f b \cdot f c \cdot \ldots \cdot f n \right)$, per il **quantificatore universale**

b. $\exists x\, f x \equiv \left(f a \vee f b \vee f c \vee \ldots \vee f n \right)$, per il **quantificatore esistenziale**

→ La verifica consisterà allora in tentativi di invalidare l'argomento per **modelli** (mondi possibili) che contengano 1, 2,…*n* individui.

→ P. es., l'argomento $\left\langle \left[\left(\forall x\, Cx \supset Ax \right) \cdot \left(\exists x\, Cx \cdot Gx \right) \right] \supset \forall x\, Gx \supset Ax \right\rangle$ (Tutti i *collie* sono affettuosi, alcuni *collie* sono cani da guardia, quindi tutti i cani da guardia sono affettuosi) è valido per un modello ad un solo individuo — infatti $\left\langle \left[\left(Ca \supset Aa \right) \cdot \left(Ca \cdot Ga \right) \right] \supset (Ga \supset Aa) \right\rangle$ è sempre vero —, ma è invalido per un modello a due individui. Infatti:
$\left\langle \left\{ \left[\left(Ca \supset Aa \right) \cdot \left(Cb \supset Ab \right) \right] \cdot \left[\left(Ca \cdot Ga \right) \vee \left(Cb \cdot Gb \right) \right] \right\} \supset \left[(Ga \supset Aa) \cdot (Gb \supset Ab) \right] \right\rangle$
è falso per (*Ca*, *Aa*, *Ga*, *Gb*) / 1 e (*Cb*, *Ab*) / 0

4.1.2. Conseguenze per l’ontologia

- In base a questa semantica estensionale è impossibile giustificare formalmente la **referenza** extralinguistica degli enunciati [Quine]. In base all’assioma di estensionalità, ciò che si può garantire è al massimo la corrispondenza fra strutture logico–formali nei vari linguaggi (p. es., ciò che in linguaggio ordinario denotiamo come “bastone”, in fisico-chimica denotiamo come “un certo aggregato di macromolecole organiche” in fisica dei materiali come “certo aggregato di composti del carbonio”, etc. senza mai la possibilità di “saltare il cerchio” di queste connotazioni equivalenti verso l’oggetto extra-linguistico.
- Di qui non sorprende che tutta l’ontologia scientifica di Quine si riduca alla famosa massima, «essere è essere il valore di una variabile».
- L’ontologia scientifica si riduce così all’individuazione di quelle condizioni logiche che rendono consistente (Cfr. § 4.1.1), caso per caso, il vincolare mediante l’opportuno quantificatore universale («per tutti gli x vale la proprietà $P(x)$») o esistenziale («esiste almeno un x tale che vale la proprietà $P(x)$») la variabile (x) o le variabili libere di una determinata funzione proposizionale. In base a tali principi, nell’ontologia scientifica si distinguono:

- fra vari tipi di oggetti *individuali*, osservabili e non (se i relativi enunciati vanno quantificati individualmente "«per un *x* tale che…"»),;
- fra i vari tipi di oggetti *collettivi* comuni a più individui, come "«organismo"», "«elettrone"», etc. (se i relativi enunciati vanno quantificati come collezioni "«per qualche *x* tale che…"»);
- fra i vari tipi di oggetti , *astratti*, come «numero», «proprietà», «classe», etc. (se i relativi enunciati vanno quantificati universalmente «per ogni *x* tale che…»).

♦ Mediante poi i relativi «connettivi» o «predicati proposizionali», come «non», «e», «implica», etc., i singoli asserti così costituiti vengono articolati in discorsi più complessi ed, al limite, in teorie scientifiche.

♦ Nei termini resi famosi da Frege: dire «*x* esiste» in questa ontologia equivale a dire «qualche *x* appartiene ad *y*». Ovvero, affermare l'esistenza di un oggetto si riduce ad affermare l'appartenenza di quell'oggetto ad una classe consistente di oggetti ed, al limite, ad una successione di classi equivalenti definite in diversi linguaggi, senza la possibilità di uscire mai da questo reticolo di equivalenze Per dirla nei termini Quine:

> Gli oggetti servono come meri «nodi» nella struttura, e questo è vero dei bastoni e delle pietre non meno degli elettroni, dei quark, dei numeri e delle classi (Quine 1984, 24).

- La scienza, di fatto, ha solo una cosa da portare avanti: il proprio discorso, le proprie affermazioni,

  > affermazioni vere, speriamo; verità che riguardano la natura. Gli oggetti, o i valori delle variabili, sono solo punti di riferimento lungo il cammino e noi possiamo permutarli o sostituirli a piacimento *nella misura in cui la struttura di enunciato–ad–enunciato sia preservata* (Quine 1984, 54).

- L'ontologia di Quine appare così in continuità con l'analisi dell'**essere** propria di tutte le logiche **estensionali** di Giuseppe Peano nel suo *Dizionario di matematica* (1901, p. 376), secondo la quale «è», ha estensionalmente, oltre che la caratteristica di un'assoluta **atemporalità,** tutti questi possibili molteplici sensi:
  - **Appartenenza:** «7 è un numero primo» $\Leftrightarrow \langle 7 \in \mathbf{N_P} \subset \mathbb{N} \rangle$
  - **Inclusione:** «l'uomo è mortale» $\Leftrightarrow \langle \mathbf{U} \subset \mathbf{M} \rangle$
  - **Identità:** «sette è uguale a tre più quattro» $\Leftrightarrow \langle 7 = 3 + 4 \rangle$

- **Particolarizzazione:** «vi sono quadrati che sono somme di quadrati» ⇔
$$\Leftrightarrow \left\langle \exists x, y, z \in \mathbb{N} \,\middle|\, \left[x, y, \left(x^2 + y^2 \right) \in \mathbf{A} \subset \mathbb{N} \right] \cdot \left(z, z^2 \in \mathbf{B} \subset \mathbb{N} \right) \cdot \left(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing \right) \right\rangle ,$$
condizione valida per tutte le cosiddette «triple pitagoriche» di numeri quadrati che sono somme di quadrati (Es. $5^2 = 3^2 + 4^2$).

4.2. Logiche intensionali

4.2.1. Caratteristiche comuni

- ♦ E' evidente che se le regole del calcolo estensionale dei predicati valgono per gran parte dei linguaggi scientifici e matematici, non valgono per moltissimi usi del linguaggio ordinario.
- ♦ P. es., la verità della proposizione composta «Giulio Cesare scrisse il *De Bello Gallico* **mentre** combatteva contro i Galli» non è certo analizzabile **vero–funzionalmente**, nei termini cioè del **solo** valore di verità delle due proposizioni elementari componenti, com'è obbligatorio nelle teorie estensionali del significato (Cfr. § 4.1.1). Occorre necessariamente, per render conto della verità della proposizione composta, una comprensione del **significato dei termini** → Il

predicato proposizionale «mentre» non è analizzabile nei termini della logica estensionale classica, **bi–valente** e **vero–funzionale** [Galvan 1992].

- ♦ Approccio **intensionale** alla logica dei predicati *vs*. approccio **estensionale:**
  - P. es., se prendiamo la proposizione «Isidoro è sapiente»,
    In senso **estensionale:** «Isidoro è uno degli uomini sapienti»: $I \in$ **S**
    In senso **intensionale:** «Isidoro è determinato dalla sapienza»: *I a S,*
    nel senso che la sapienza è una **qualità** che determina l'esistenza di Isidoro → l'**esistenza** di Isidoro non si riduce all'appartenenza di classe, non è un puro essere in senso estensionale in nessuno dei sensi di Peano, è l'**essere della qualità** non è l'essere dell'esistenza.
- ♦ Generalmente le logiche intensionali si caratterizzano perché rifiutano due assiomi del calcolo dei predicati estensionale, in quanto la loro applicazione rende **insensati** diverse forme del linguaggio ordinario [Zalta 1988]:
  - **Assioma di estensionalità**: **A º B Þ A = B**
  - **Assioma di generalizzazione esistenziale:** $f\,v \Rightarrow \exists x\, f\, x$ (Cfr. § 4.1.1)

- P. es.: «Chiare, fresche e dolci *acque*, ove le belle membra pose *colei* che solo a me par donna» diventerebbe «Chiare fresche e dolci H_2O, ove le belle membra pose *qualcosa* che solo a me par donna»
- Oppure: «*Signore*, benedici quest'*acqua…*» diventerebbe «*Qualcosa*, benedici quest' H_2O*…*».

♦ Diversi tipi di **logiche intensionali,** le principali e le più studiate, perché implicite nella stessa logica aristotelica, sono quelle **modali** relative a diverse **modalità di esistenza** dei rispettivi oggetti e quindi di solito formalizzate mediante l'ausilio di opportuni **operatori modali**. Seguendo una serie di distinzioni che risalgono fino allo Pseudoscoto e a Ockham:
- **Modalità aletiche**: «è possibilmente vero», «è necessariamente vero»
- **Modalità ontologiche:** «è necessario», «è contingente»
- **Modalità epistemiche:** «è creduto», «è conosciuto»
- **Modalità deontiche:** «è permesso», «è vietato»
- **Modalità temporali:** «è sempre il caso», «è talvolta il caso»
- **Modalità valutative:** «è buona cosa», «è cattiva cosa»
- **…**

4.2.2. L’ontologia formale

- ♦ Particolare importanza per la riflessione filosofica in metafisica, ontologia ed epistemologia, anche per le sue immediate implicazioni pratiche, è dato dalla riflessione sui **diversi significati del semantema «essere»,** distinti dal semplice **esistere** e dalle sue varie modalità, negli usi linguistici del linguaggio ordinario innanzitutto nelle scienze umane.
- ♦ → Nascita di una nuova disciplina l’**ontologia formale** (www.formalontology.it).
- ♦ Tale disciplina, oltre alle logiche modali, concentra la sua attenzione e l’analisi logica su quei significati dell’essere non riconducibili all’esistere e quindi intimamente legati ai **contenuti semantici** che s’intendono comunicare e da cui dipendono le differenze fra le varie filosofie, ideologie, religioni, teologie, culture e quindi le **varie interpretazioni** degli oggetti esistenti, che in quanto tali sono i medesimi per tutti.
- ♦ → Importanza delle **logiche non–classiche** più «eterodosse» rispetto alla comune logica formale e matematica. P.es.:

- **Logica mereologica** (*mereology*) che si rifà a Lesniewski e si concentra sui significati dell'essere connessi alla distinzione **tutto–parti**, previa a qualsiasi concettualizazione estensionale in termini di collezioni, classi, insiemi, etc.
- **Logica libera** (*free logic*) che si rifà a Meinong e si concentra sullo statuto ontologico di oggetti **non–esistenti** in senso estensionale, quali gli oggetti fantastici, gli enti logici, le essenze, le qualità, etc.
- **Logica sfumata** (*fuzzy logic*) che si rifà a Lukasiewicz e alla sua logica polivalente nello studio dei gradi di verità/falsità delle espressioni.
- **Logica paraconsistente** (*paraconsistent logic*) che si concentra sul significato e lo statuto ontologico dei paradossi, delle nozioni contraddittorie e degli enti mentali in genere.
- **…**

♦ La crescente importanza che va assumendo questa disciplina che può far parlare ormai di una **rinascita della riflessione metafisica e ontologica,** interna alla filosofia analitica, è legata alle molteplici **applicazioni pratiche** che essa consente, in tutti i campi della cultura contemporanea, **l'informatica** innanzitutto (→ *formal ontology engineering*).

- P. es., per portare il computer e l’accesso alle reti di comunicazione sempre più vicina alla vita e all’esperienza quotidiana, addirittura di gente analfabeta quale quella dei paesi in via di sviluppo, occorre renderlo capace di trattare strutture del linguaggio ordinario…

♦ In un’epoca di **globalizzazione** come la nostra, infatti, il futuro dipende largamente dalla **trans-culturalità** e dalla **trans-disciplinarità.** Occorre perciò dare (o restituire) alle scienze umane un **rigore formale** e dunque **un’universalità comunicativa dei rispettivi contenuti intensionali** paragonabile a quello dato nell’età moderna alle scienze matematiche e naturali dall’uso del **simbolismo**.

♦ Ciò può essere ottenuto solo **rendendo espliciti** i diversi e irriducibili **contenuti intensionali** della comunicazione e del linguaggio in modo da **minimizzare** i tempi della reciproca comprensione e **massimizzare** i tempi dedicati alla soluzione dei problemi comuni, almeno là dove l’analisi intensionale mostra che ciò risulta possibile.

♦ Infine centralità dell’ontologia formale per una piena restituzione alla cultura post-moderna delle ricchezze dell’ontologia della scolastica — e di Tommaso d’Aquino, in particolare — che ha proprio in questa (ri)scoperta dei molteplici sensi dell’essere non riconducibili alla mera esistenza il suo aspetto più qualificante.

- Non per nulla gli scolastici e Tommaso sono fra gli autori più studiati dai seguaci dell’ontologia formale…

INDICE

1. Premessa 0
   1.1. Bibliografia 1
   1.2. Schema del corso 2
2. I sistemi formali 3
   2.1. Caratterizzazione dei sistemi formali 3
   2.2. Proprietà dei sistemi formali 7
      2.2.1. Consistenza 7
      2.2.2. Completezza 7
      2.2.3. Decidibilità 8
3. Teoria dei fondamenti 9
   3.1. Metodi finitari e non finitari 9
      3.1.1. La crisi del principio di evidenza 9
      3.1.2. La scoperta delle antinomie logiche 15
      3.1.3. La soluzione assiomatica delle antinomie 22
      3.1.4. Il programma formalista di Hilbert 25
   3.2. Alcuni teoremi di limitazione per i sistemi formali 29

3.2.1. Teoremi di Gödel 29
4. Teoria del significato 32
4.1. Logiche estensionali 32
4.1.1. Teoria estensionale del significato e della verità 32
4.1.2. Conseguenze per l'ontologia 36
4.2. Logiche intensionali 39
4.2.1. Caratteristiche comuni 39
4.2.2. L'ontologia formale 42