LOGICA INTENSIONALE

S. Galvan
(Università Cattolica Milano)

LOGICA DEONTICA

1. Sistemi deontici puri

O-KD, O-KD4, O-KD5, O-KD45

2. Sistemi aletici di logica deontica

2.1 Sintassi

$$\mathbf{L}(\mathbf{d}) = <\mathbf{A}(\mathbf{d}),\mathbf{F}(\mathbf{d})>.$$

$\mathbf{A}(\mathbf{d}) = \mathbf{A}(\mathbf{k}) + Q$ (costante di idealizzazione)+ $\Box$.

$\mathbf{F}(\mathbf{d})$ = def. ind. usuale.

def.ni : $O\alpha =_{def.} :\Box(Q\rightarrow\alpha)$, $P\alpha =_{def.} \neg O\neg\alpha$

$$\mathbf{d} = <\mathbf{L}(\mathbf{d}),\mathbf{D}(\mathbf{d})>$$

$\mathbf{D}(\mathbf{d}) = \mathbf{D}(\mathbf{k})$ + regola **N** + assiomi

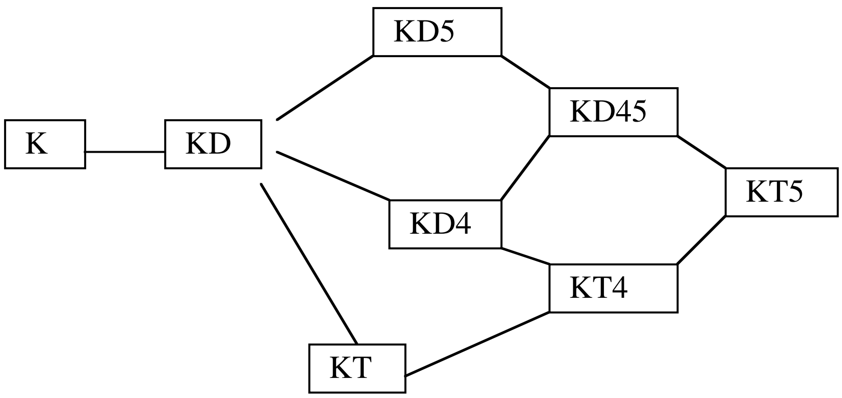
a) Regola di necessitazione **N**

b) -Assiomi che regolano il segno $\Box\alpha$.

-Assioma specifico **Q** che regola la costante Q: $\Diamond Q$

In dipendenza dalla scelta degli assiomi per $\Box$ si ha:

KQ: nessuna assioma per $\Box$
K4Q: assioma **4** per $\Box$
K5Q: assioma **5** per $\Box$
K45Q: assioma **4** e **5** per $\Box$
KT5Q: assioma **T** e **5** per $\Box$



2.2 Semantica

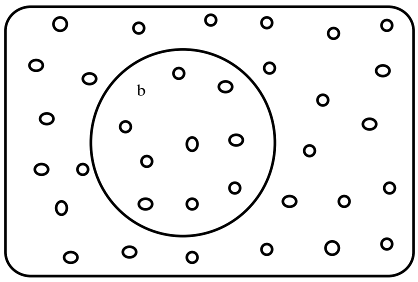
2.1 Definizioni preliminari

Def. 1: b-struttura (<W,R,b>)

<W,R> è una struttura normale

b è un sottinsieme non vuoto di W (mondi buoni)

Esempio:



Def. 2: Interpretazione su W (I): usuale

Def. 3: b-modello (<W,R,b,I>)

Def. 4: Verità in un mondo di un b-modello ($<W,R,b,I> \models_u \alpha$)

Base: $\alpha \equiv p$

$<W,R,b,I> \models_u p \Leftrightarrow I(p,u) = 1$

$\alpha \equiv Q$

$<W,R,b,I> \models_u Q \Leftrightarrow u \in b$

Passo: $\alpha \equiv \beta \wedge \gamma$

$<W,R,b,I> \models_u \beta \wedge \gamma \Leftrightarrow <W,R,b,I> \models_u \beta$ et $<W,R,b,I> \models_u \gamma$

$\alpha \equiv \beta \vee \gamma$

$<W,R,b,I> \models_u \beta \vee \gamma \Leftrightarrow <W,R,b,I> \models_u \beta$ vel $<W,R,b,I> \models_u \gamma$

$\alpha \equiv \beta \rightarrow \gamma$

$<W,R,b,I> \models_u \beta \rightarrow \gamma \Leftrightarrow (<W,R,b,I> \models_u \beta \Rightarrow <W,R,b,I> \models_u \gamma)$

$\alpha \equiv \neg \beta$

$<W,R,b,I> \models_u \neg \beta \Leftrightarrow <W,R,b,I> \not\models_u \beta$

$\alpha \equiv \Box \beta$

$<W,R,b,I> \models_u \Box \beta \Leftrightarrow (\text{om } v)(u \; R \; v \Rightarrow <W,R,b,I> \models_v \beta)$

Nota: *verità di una obbligazione*

$$
\begin{aligned}
\langle W,R,b,I\rangle \models_u O\beta &\Leftrightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_u \Box(Q\rightarrow\beta) && \text{def. } O\\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(u\ R\ v \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_v Q\rightarrow\beta) && \text{def. } \models\\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(u\ R\ v \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_v Q\\
&\qquad\qquad \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_v \beta) && \text{def. } \models\\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(u\ R\ v \text{ et } \langle W,R,b,I\rangle \models_v Q\\
&\qquad\qquad \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_v \beta) && E\Rightarrow\\
&\Leftrightarrow (\text{om } v)(u\ R\ v \text{ et } v\in b\\
&\qquad\qquad \Rightarrow \langle W,R,b,I\rangle \models_v \beta) && \text{def. } \models
\end{aligned}
$$

Similmente: verità di un permesso

$$
\langle W,R,b,I\rangle \models_u P\beta \Leftrightarrow (\text{ex } v)(u\ R\ v \text{ et } \langle W,R,b,I\rangle \models_v \beta) \qquad \text{def. } P
$$

Def. 5: b-serialità di R

$$
\text{b-seriale } R \Leftrightarrow (\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v\in b)
$$

Deff. ni: *altre definizioni* si ottengono per estensione

2.2 Correttezza e teoremi di caratterizzazione

- Correttezza di KQ rispetto a modelli basati su b-strutture

Dem: $\Vdash_{R\ b\text{-}ser} \Diamond Q$. Quindi:

(om <W,R,b> con R b-seriale)(om I)(om u)(<W,R,b,I> $\models_u \Diamond Q$)

def. $\Vdash_{R\ b\text{-}ser}$

R b-ser $\Rightarrow$ <W,R,b, I> $\models_u \Diamond Q$ — per Eom

$\downarrow$

H: R b-ser — Dem: <W,R,b,I> $\models_u \Diamond Q$

Dimostrazione:

<W,R,b,I> $\not\models_u \Diamond Q$	Ipotesi per assurdo
<W,R,b,I> $\models_u \Box\neg Q$	def. $\models$ e $\Diamond$
(om v)(uRv $\Rightarrow$ <W,R,b,I> $\not\models_v$ Q)	def. $\models$
non(ex v)(uRv et <W,R,b,I> $\models_v$ Q)	logica
non(ex v)(uRv et v $\in$ b)	def. $\models$
(ex v)(uRv et v $\in$ b)	per b-serialità di R
<W,R,b,I> $\models_u \Diamond Q$	(non k) e def. $\models$

- risultati generali

$X \vdash_{KQ} \alpha \Leftrightarrow X \Vdash_{KQ} \alpha$

$\Leftrightarrow$ (*om <W,R>* con *R b-seriale*)($X \Vdash_{<W,R>} \alpha$)

$X \vdash_{K4Q} \alpha \Leftrightarrow X \Vdash_{K4Q} \alpha$

$\Leftrightarrow$ (*om <W,R> con R b-seriale e trans*)($X \Vdash_{<W,R>} \alpha$)

$X \vdash_{K5Q} \alpha \Leftrightarrow X \Vdash_{K5Q} \alpha$

$\Leftrightarrow$ (*om <W,R> con R b-seriale e eucl*)($X \Vdash_{<W,R>} \alpha$)

$X \vdash_{KT5Q} \alpha \Leftrightarrow X \Vdash_{KT5Q} \alpha$

$\Leftrightarrow$ (*om <W,R> con R b-seriale, rifl e eucl*)($X \Vdash_{<W,R>} \alpha$)

2.3 Rapporti con i sistemi deontici puri

Def. di funzione di traduzione dal linguaggio di O-KD (linguaggio di un sistema puro) a quello di KQ (linguaggio di un sistema aletico): $\Phi p \equiv p$; $\Phi(\neg\alpha) \equiv \neg\Phi\alpha$; $\Phi(\alpha \bullet \beta) \equiv \Phi\alpha \bullet \Phi\beta$ (ove $\bullet$ sta per un qualsiasi connettivo biargomentale); $\Phi(O\alpha) \equiv \Box(Q \rightarrow \Phi\alpha)$

Allora risulta, ponendo $c_1 \Leftrightarrow_\Phi$ O-c_2 $\Leftrightarrow$ $\vdash_{O\text{-}c2} \alpha \Leftrightarrow \vdash_{c2} \Phi\alpha$

Sistemi deontici		Sistemi aletici
O-KD	$\Leftrightarrow_\Phi$	KQ
O-KD4	$\Leftrightarrow_\Phi$	K4Q
O-KD5	$\Leftrightarrow_\Phi$	K5Q
O-KD45	$\Leftrightarrow_\Phi$	KT5Q

Teorema: O-KD $\Leftrightarrow_{\Phi}$ KQ

1. verso: $\Rightarrow$ (dimostrazione sintattica)

Base: caso interessante costituito da O-KD

Dem: $\Phi(O\alpha) \vdash_{KQ} \Phi(P\alpha)$.

Dimostrazione:

$Q \to \Phi\alpha \;\; Q \vdash_{KQ} \Phi\alpha$	A, MP
$Q \to \Phi\alpha \;\; Q \vdash_{KQ} Q \wedge \Phi\alpha$	A, I$\wedge$
$Q \to \Phi\alpha) \;\; \neg(Q \wedge \Phi\alpha) \vdash_{KQ} \neg Q$	C
$\Box(Q \to \Phi\alpha) \;\; \Box\neg(Q \wedge \Phi\alpha) \vdash_{KQ} \Box\neg Q$	N
$\Box(Q \to \Phi\alpha) \;\; \Diamond Q \vdash_{KQ} \Diamond(Q \wedge \Phi\alpha)$	C, def. $\Diamond$
$\Box(Q \to \Phi\alpha) \;\; \vdash_{KQ} \Diamond(Q \wedge \Phi\alpha)$	per Q
$\Phi(O\alpha) \vdash_{KQ} \Phi(P\alpha)$	def. Φ

Passo: Presenta interesse solo il caso in cui la sequenza derivata è ottenuta per **O-N**. La dimostrazione è analoga a sopra.

2. verso: $\Leftarrow$ (dimostrazione semantica)

H: $\vdash_{KQ} \Phi\alpha$ Dem: $\vdash_{O\text{-}KD}\ \alpha$

$\downarrow$

H: $\Vdash\!\!\!/_{O\text{-}KD}\ \alpha$ Dem: $\Vdash\!\!\!/_{KQ}\ \Phi\alpha$

$\downarrow$ $\uparrow$

H: $\langle W,R,I\rangle \not\models_u \alpha$ Dem: $\langle W,R,b,I\rangle \not\models_u \Phi\alpha$

(ove $\langle W,R,b,I\rangle$ è detto lo *-modello di $\langle W,R,I\rangle$)

Dimostrazione:

a) Costruzione dello *-modello di $\langle W,R,I\rangle$

$b = \{v \in W: (\text{ex } u)(uRv)\}$ (buono = accessibile)

Lemma 1: $<W,R,b,I>$ è un b-modello con R b-seriale.

Dimostrazione:

uRv	a
$v \in b$	def. b
uRv et $v \in b$	Iet
$(ex\ v)(uRv$ et $v \in b)$	Iex
$uRv \Rightarrow (ex\ v)(uRv$ et $v \in b)$	s
$(ex\ v)(uRv) \Rightarrow (ex\ v)(uRv$ et $v \in b)$	exI
$(om\ u)((ex\ v)(uRv) \Rightarrow (ex\ v)(uRv$ et $v \in b))$	Iom
$(om\ u)(ex\ v)(uRv) \Rightarrow (om\ u)(ex\ v)(uRv$ et $v \in b)$	Distr om $\Rightarrow$
$(om\ u)(ex\ v)(uRv)$	R ser
$(om\ u)(ex\ v)(uRv$ et $v \in b)$	mp

Lemma 2: $uRv \Leftrightarrow uRv$ et $v \in b$. Immediato da sopra.

Lemma 3:

$$(om\ \alpha \in L(O\text{-}KD))(<W,R,I> \models_u \alpha \Leftrightarrow <W,R,b,I> \models_u \Phi(\alpha))$$

Base: $\alpha \equiv p$

$<W,R,I> \models_u p$	$\Leftrightarrow I(p,u) = 1$	def. $\models$
	$\Leftrightarrow <W,R,b,I> \models_u p$	def. $<W,R,b,I>$
	$\Leftrightarrow <W,R,b,I> \models_u \Phi p$	def. Φ

Passo: $\alpha \equiv O\beta$ (unico caso interessante)

$$
\begin{array}{lll}
<W,R,I> \models_u O\beta \Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \Rightarrow <W,R,I> \models_v \beta) & & \text{def. } \models \\
\quad \Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \text{ et } v \in b \Rightarrow <W,R,I> \models_v \beta) & & \text{per L2} \\
\quad \Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \text{ et } v \in b \Rightarrow & & \\
\qquad \Rightarrow <W,R,b,I> \models_v \Phi\beta) & & \text{per Hi} \\
\quad \Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \text{ et } <W,R,b,I> \models_v Q \Rightarrow & & \\
\qquad \Rightarrow <W,R,b,I> \models_v \Phi\beta) & & \text{def. } \models \\
\quad \Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \Rightarrow (<W,R,b,I> \models_v Q \Rightarrow & & \\
\qquad \Rightarrow <W,R,b,I> \models_v \Phi\beta)) & & \text{I}\Rightarrow \\
\quad \Leftrightarrow (\text{om } v)(uRv \Rightarrow <W,R,b,I> \models_v Q \rightarrow & & \\
\qquad \rightarrow \Phi\beta) & & \text{def. } \models \\
\quad \Leftrightarrow <W,R,b,I> \models_u \Box(Q \rightarrow \Phi\beta) & & \text{def. } \models \\
\quad \Leftrightarrow <W,R,b,I> \models_u \Phi(O\beta) & & \text{def. } \Phi
\end{array}
$$

Ora, il demostrandum: $<W,R,b,I> \not\models_u \Phi\alpha$ si ottiene da H: $<W,R,I> \not\models_u \alpha$ e L3 per contrapposizione.

NB: il precedente teorema si può estendere agli altri calcoli.

3. Sistemi misti di logica deontica

3.1 Sintassi

L(**d**) = <**A**(**d**),**F**(**d**)>.

A(**d**) = **A**(**k**) + ❒ + O

F(**d**) = def. ind. usuale. Def.ni usuali

d = <**L**(**d**),**D**(**d**)>

D(**d**) = **D**(**k**) +

a) regole ed assiomi che regolano O e ❒ separatamente

b) principi-ponte

3.2 Semantica dei sistemi misti

a) Struttura complessa <W,R,S>

b) Le altre nozioni si ottengono per estensione

3.3 Il sistema KT5-O-KD-O$\Box$O-$\Box$O (in breve K-$\Box$O)

Regole ed assiomi:

D(K-$\Box$O) = D(KT5) + D(O-KD) + Assiomi-ponte **O$\Box$O e** $\Box$O:

O$\Box$O = $O\alpha \rightarrow \Box O\alpha$ (necessitazione degli obblighi)

$\Box$O = $\Box\alpha \rightarrow O\alpha$ (assioma hintikkiano)

Teoremi:

1) Assioma O-4: $O\alpha \vdash_{K\text{-}\Box O} OO\alpha$

Dimostrazione:

$O\alpha \vdash \Box O\alpha$	da O$\Box$O
$\Box O\alpha \vdash OO\alpha$	da $\Box$O
$O\alpha \vdash OO\alpha$	KS

2) Assioma O-5: $P\alpha \vdash_{K\text{-}\Box O} OP\alpha$

$O\neg\alpha \vdash \Box O\neg\alpha$	da O$\Box$O
$\Diamond O\neg\alpha \vdash \Diamond\Box O\neg\alpha$	P
$\Diamond\neg O\neg\alpha \vdash \Box\Diamond\neg O\neg\alpha$	da 5
$\Diamond\Box O\neg\alpha \vdash \Box O\neg\alpha$	C
$\Diamond O\neg\alpha \vdash \Box O\neg\alpha$	KS
$\Diamond O\neg\alpha \vdash O\neg\alpha$	per T
$P\alpha \vdash \Box P\alpha$	per C e def.ni P e $\Diamond$
$P\alpha \vdash OP\alpha$	per $\Box$O

3) Assioma O$\Diamond$: $O\alpha \vdash_{K\text{-}\Box O} \Diamond\alpha$

$\Box\neg\alpha \vdash O\neg\alpha$	da $\Box$O
$P\alpha \vdash \Diamond\alpha$	per C e def.ni P e $\Diamond$
$O\alpha \vdash P\alpha$	da O-D
$O\alpha \vdash \Diamond\alpha$	KS

Equivalenza tra K-❒O e KT5Q

La funzione di traduzione Φ sia estesa, ponendo $\Phi_{\square} = \Phi + \Phi(\square\alpha) = \square\Phi\alpha$. Allora si ha:

$$\vdash_{KT5Q} \Phi\alpha \Leftrightarrow \vdash_{K\text{-}\square O} \alpha$$

In sintesi:

Sistemi deontici		Sistemi aletici		Sistemi misti
O-KD	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	KQ		
O-KD4	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	K4Q		
O-KD5	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	K5Q		
O-KD45	$\Leftrightarrow_{\Phi}$	KT5Q	$\Leftrightarrow_{\Phi\square}$	KT5-O-KD-O❒O-❒O

3.4 Rapporto tra i principi $O\lozenge$ (assioma kantiano), $\square O$ (assioma hintikkiano) e $O\square O$ (principio di necessitazione degli obblighi)

1) In tutte le logiche normali:

$$\square O \Leftrightarrow MF\ (O\alpha \wedge \square(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow O\beta)$$

1. Verso: $\Rightarrow$

$\square(\alpha\rightarrow\beta) \vdash O(\alpha\rightarrow\beta)$	A, $\square O$
$\square(\alpha\rightarrow\beta) \vdash O\alpha\rightarrow O\beta$	DistrO
$\square(\alpha\rightarrow\beta) \wedge O\alpha \vdash O\beta$	E$\rightarrow$, $\wedge$I

2. Verso: $\Leftarrow$

$OT\ \ \square(T\rightarrow\alpha) \vdash O\alpha$	da MF
$\vdash OT$	def. T, O-N
$\square(T\rightarrow\alpha) \vdash O\alpha$	KS
$\alpha \vdash T\rightarrow \alpha$	PI
$\square\alpha \vdash \square(T\rightarrow \alpha)$	N
$\square\alpha \vdash O\alpha$	KS

2) In tutte le logiche normali:

$$O\Diamond \Rightarrow O\text{-}D$$

$O\bot \vdash \Diamond\bot$	da $O\Diamond$
$O\bot \vdash \neg\Box\top$	def. $\bot$
$\Box\top \vdash \neg O\bot$	C
$\vdash \Box\top$	def. $\top$ e N
$\vdash \neg O\bot$	KS
$\vdash \neg O(\alpha \wedge \neg\alpha)$	def. $\bot$
$O\alpha \wedge O\neg\alpha \vdash O(\alpha \wedge \neg\alpha)$	A, $I\wedge$, O-N, $\wedge I$
$\neg O(\alpha \wedge \neg\alpha) \vdash \neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$	C
$\vdash \neg(O\alpha \wedge O\neg\alpha)$	KS
$\vdash O\alpha \rightarrow P\alpha$	$Tr\wedge\rightarrow$

3) In tutte le logiche normali:

$$\Box\mathrm{O} \wedge \mathrm{O\text{-}D} \Rightarrow \mathrm{O}\Diamond$$

$\Box\neg\alpha \vdash \mathrm{O}\neg\alpha$	da $\Box$O
$\mathrm{O}\neg\alpha \vdash \neg\mathrm{O}\alpha$	da O-D
$\Box\neg\alpha \vdash \neg\mathrm{O}\alpha$	KS
$\mathrm{O}\alpha \vdash \Diamond\alpha$	C