

LOGICA INTENSIONALE

S. Galvan

(Università Cattolica Milano)

LOGICA DEONTICA E LH

Formule ontiche e deontiche

Sia dato il linguaggio di un sistema aletico o misto di logica deontica. Allora:

Def. 1: **Formula ontica**

a. $\alpha \in \text{ONN} \Leftrightarrow \alpha \in \text{L non modale (p, q, r, ... } \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$

b. $\alpha \in \text{ON} \Leftrightarrow \alpha \in \text{L modale (p, q, r, ... } \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \Box)$

Def. 2: **Obbligo elementare/Permesso elementare**

$\alpha \in \text{ON} \Rightarrow O\alpha$ è un obbligo elementare

$\alpha \in \text{ON} \Rightarrow P\alpha$ è un permesso elementare

Def. 3 : **Formula deontica** ($\alpha \in \text{DON}$)

Base: (per ogni obbligo elementare $O\alpha$)($O\alpha \in \text{DON}$)

Passo: $\alpha \in \text{DON} \Rightarrow \neg\alpha, \Box\alpha, O\alpha \in \text{DON}$

$\alpha \in \text{DON e } \beta \in \text{DON} \Rightarrow \alpha \wedge \beta, \alpha \vee \beta,$

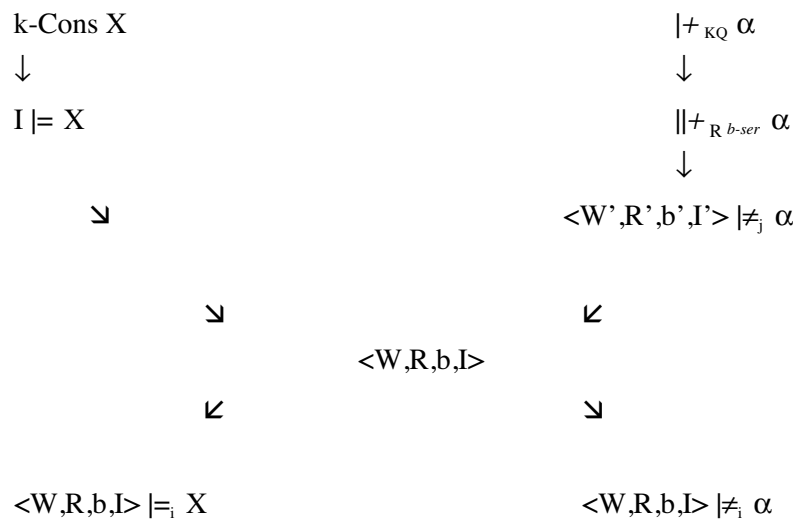
$\alpha \rightarrow \beta \in \text{DON}$

1. Formulazione della legge di Hume

Teorema: α sia una formula DON, X sia un insieme consistente (rispetto al calcolo proposizionale classico) di formule ONN, C sia uno qualsiasi dei calcoli deontici puri o aletici. Allora: $\vdash_C \alpha \Rightarrow X \vdash_C \alpha$.

Dimostrazione (per KQ):

Struttura della derivazione



Costruzione di $\langle W, R, b, I \rangle$

$$W = W' \cup \{i\}$$

$$R = xRv \Leftrightarrow xR'v \text{ (ove } x \in W' \text{ e } v \in W)$$

$$iRv \Leftrightarrow jR'v$$

$$b = b' \text{ (} v \in b \Leftrightarrow v \in b')$$

$$I: I(p, x) = I'(p, x)$$

$$I(p, i) = I(p)$$

Lemma 1: $\langle W, R, b, I \rangle$ è un modello per KQ. Infatti R è b-seriale, cioè
(om u)(ex v)(uRv e v ∈ b)

Lemma 2: $(\text{om } \alpha)(\langle W, R, b, I \rangle \models_x \alpha \Leftrightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_x \alpha)$

Base: $\alpha \equiv p$

$$\begin{aligned} \langle W, R, b, I \rangle \models_x p &\Leftrightarrow I(p, x) = 1 && \text{def. } \models \\ &\Leftrightarrow I'(p, x) = 1 && \text{def. } I \\ &\Leftrightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_x p && \text{def. } \models \end{aligned}$$

$\alpha \equiv Q$

$$\begin{aligned} \langle W, R, b, I \rangle \models_x Q &\Leftrightarrow x \in b && \text{def. } \models \\ &\Leftrightarrow x \in b' && \text{def. } b \\ &\Leftrightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_x Q && \text{def. } \models \end{aligned}$$

Passo: $\alpha \equiv \Box \beta$

$$\begin{aligned} \langle W, R, b, I \rangle \models_x \Box \beta &\Leftrightarrow (\text{om } v)(xRv \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) && \text{def. } \models \\ &\Leftrightarrow (\text{om } v)(xR'v \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) && \text{def. } R \\ &\Leftrightarrow (\text{om } y)(xR'y \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_y \beta) && \text{def. } y \\ &\Leftrightarrow (\text{om } y)(xR'y \Rightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_y \beta) && \text{per Hi} \\ &\Leftrightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_x \Box \beta && \text{def. } \models \end{aligned}$$

Lemma 3: $(\text{om } \alpha \in \text{DON})(\langle W, R, b, I \rangle \models_i \alpha \Leftrightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_j \alpha)$

Base: $\alpha \equiv \Box(Q \rightarrow \beta)$

$$\begin{aligned}
 \langle W, R, b, I \rangle \models_i \Box(Q \rightarrow \beta) &\Leftrightarrow (\text{om } v)(iRv \text{ et } v \in b \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) \\
 &\text{def. } \models \\
 &\Leftrightarrow (\text{om } v)(jR'v \text{ et } v \in b' \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta) \quad \text{def. } y, R, b \\
 &\Leftrightarrow (\text{om } y)(jR'y \text{ et } y \in b' \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_y \beta) \quad \text{def. } y \\
 &\Leftrightarrow (\text{om } y)(jR'y \text{ et } y \in b' \Rightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_y \beta) \quad \text{L2} \\
 &\Leftrightarrow \langle W', R', b', I' \rangle \models_y \Box(Q \rightarrow \beta) \quad \text{per def. } \models
 \end{aligned}$$

Passo: usuale

Lemma 4: $(\text{om } \alpha \in \text{ONN})(\langle W, R, b, I \rangle \models_i \alpha \Leftrightarrow I \models \alpha)$. Immediato.

Conclusione:

$$\begin{array}{ccc}
 \langle W, R, b, I \rangle \models_i X & & \langle W, R, b, I \rangle \not\models_i \alpha \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \text{L4} & & \text{L3}
 \end{array}$$

2. Formulazione della legge di Hume

Teorema: β sia una formula ON, X sia un insieme consistente (rispetto al calcolo KT5) di formule ON, $K-\Box O$ sia il sistema misto KT5-O-KD-O \Box O- \Box O. Allora: $X \vdash_{K-\Box O} O\beta \Rightarrow X \vdash_{KT5} \Box\beta$.

Dimostrazione:

Data la equivalenza tra $K-\Box O$ e KT5Q la dimostrazione si può condurre anche nella maniera seguente:

Struttura della derivazione

H: $X \vdash_{KT5Q} O\beta$

Dem: $X \vdash_{KT5} \Box\beta$

↓

$X \vdash_{KT5} \Box\beta$

Dem: $X \vdash_{KT5Q} O\beta$

Sviluppo:

$X \Vdash_{\text{KT5}} \Box\beta$		Caratterizzazione
$(\exists x \langle W, R \rangle \text{ per KT5})(\exists I)(\exists u)(\langle W, R, I \rangle \models_u X \text{ e } \langle W, R, I \rangle \not\models_u \Box\beta)$		
		Def. \Vdash
$\langle W', R', I' \rangle \models_u X,$	*	Eex
$\langle W', R', I' \rangle \not\models_u \Box\beta$		Eex
$\langle W', R', I' \rangle \models_u \neg\Box\beta$		def. \models
$\langle W', R', I' \rangle \models_u \Diamond\neg\beta$		def. \Diamond
$(\exists v)(u R' v \text{ et } \langle W', R', I' \rangle \models_v \neg\beta)$		def. \models
$u R' v \text{ et } \langle W', R', I' \rangle \models_v \neg\beta$	**	Eex

Ora, la struttura $\langle W', R' \rangle$ è costituita da classi di equivalenza di mondi relati tra di loro: u si trova in una di queste classi. Si ponga:

W = classe di equivalenza in cui esiste u

R = restrizione di R' a W

$b = \{v\}$ (il mondo in cui è vero $\neg\beta$)

I = restrizione di I' a W

Si ha allora:

Lemma 1: $\langle W, R, b, I \rangle$ è un modello per KT5Q

La dimostrazione segue dal fatto che R è b -seriale in quanto $(\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$. Le proprietà formali di R e di I sono ereditate da quelle di R' e I' .

Lemma 2:

$(\text{om } \alpha \in \text{ON})(\text{om } v \in W)(\langle W, R, b, I \rangle \models_v \alpha \Leftrightarrow \langle W', R', I' \rangle \models_v \alpha)$

La dimostrazione segue dal fatto che i modelli coincidono rispetto alla parte aletica.

Pertanto, la dimostrazione del teorema prosegue nella maniera seguente:

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u X$	♠	da * per L2
$uRv \text{ et } v \in b \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v \neg\beta$		da ** per L2 e def. b
$(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v \neg\beta)$		Iex
$\langle W, R, b, I \rangle \models_u P\neg\beta$		def. \models
$\langle W, R, b, I \rangle \not\models_u O\beta$	♠♠	TrPO
$(\text{ex } \langle W, R, b \rangle \text{ per KT5Q})(\text{ex } I)(\text{ex } u)(\langle W, R, I \rangle \models_u X \text{ e } \langle W, R, I \rangle \not\models_u O\beta)$		Iex da ♠ e ♠♠ e L1
$X \Vdash_{\text{KT5Q}} O\beta$		def. $X \Vdash$
$X \Vdash_{\text{KT5Q}} O\beta$		per caratterizzazione

Dimostrazione alternativa:

Data la equivalenza tra $K \dashv\vdash O$ e $KT5Q$ la dimostrazione si può condurre anche nella maniera seguente:

Struttura della derivazione:

H: $X \vdash_{KT5Q} O\beta$

Dem: $X \vdash_{KT5} \Box\beta$

Sviluppo:

$X \vdash_{KT5} \Box\beta$

Ha

$X \Vdash_{KT5} \Box\beta$

Caratterizzazione

(ex $\langle W,R \rangle$ per $KT5$)(ex I)(ex u)($\langle W,R,I \rangle \models_u X$ e $\langle W,R,I \rangle \not\models_u \Box\beta$

Def. \Vdash

$\langle W,R,I \rangle \models_u X$

*

Ex

$\langle W,R,I \rangle \not\models_u \Box\beta$

**

Eex

Ora, si trasformi $\langle W,R,I \rangle$ in un b-modello ponendo $b = W$. Vale allora:

Lemma 1: $\langle W, R, b, I \rangle$ è un modello per KT5Q

La dimostrazione segue dal fatto che R è b -seriale in quanto $(\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$.

Lemma 2:

$(\text{om } \alpha \in \text{ON})(\text{om } v)(\langle W, R, b, I \rangle \models_v \alpha \Leftrightarrow \langle W, R, I \rangle \models_v \alpha)$

Per coincidenza rispetto alla parte aletica.

Pertanto:

$(\text{om})(\langle W, R, b \rangle \text{ per KT5Q})(\text{om } I)(\text{om } u)(\langle W, R, b, I \rangle \models_u X \Rightarrow$

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u O\beta$. da H

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u X \Rightarrow \langle W, R, b, I \rangle \models_u O\beta$ per Eom e L1

Ora:

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u X$. da * per L2

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u O\beta$ mp

ma allora:

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u \Box\beta$ per def. di b

$\langle W, R, I \rangle \models_u \Box\beta$ per L2

il che contrasta con **. Pertanto:

$X \not\models_{\text{KT5}} \Box\beta$ (non k)

3. Formulazione della legge di Hume

Teorema: β sia una formula ON, X sia un insieme consistente (rispetto al calcolo KT5) di formule ON, $K-\Box O$ sia il sistema misto KT5-O-KD-O \Box O- \Box O. Allora: $X \vdash_{K-\Box O} P\beta \Rightarrow X \vdash_{KT5} \Box\beta$.

Dimostrazione:

Data la equivalenza tra $K-\Box O$ e KT5Q la dimostrazione si può condurre anche nella maniera seguente:

Struttura della derivazione:

H: $X \vdash_{KT5Q} P\beta$

Dem: $X \vdash_{KT5} \Box\beta$

↓

$X \vdash_{KT5} \Box\beta$

Dem: $X \vdash_{KT5Q} P\beta$

Sviluppo:

$X \Vdash_{\text{KT5}} \Box\beta$		Caratterizzazione
$(\exists x \langle W, R \rangle \text{ per KT5})(\exists I)(\exists u) (\langle W, R, I \rangle \models_u X \text{ e } \langle W, R, I \rangle \not\models_u \Box\beta)$		Def. \Vdash
$\langle W', R', I' \rangle \models_u X$	*	Eex
$\langle W', R', I' \rangle \not\models_u \Box\beta$		Eex
$\langle W', R', I' \rangle \models_u \neg\Box\beta$		def. \models
$\langle W', R', I' \rangle \models_u \Diamond\neg\beta$		def. \Diamond
$(\exists v)(uR'v \text{ et } \langle W', R', I' \rangle \models_v \neg\beta)$		def. \models
$uR'v \text{ et } \langle W', R', I' \rangle \models_v \neg\beta$	**	Eex

Ora, la struttura $\langle W', R' \rangle$ è costituita da classi di equivalenza di mondi relati tra di loro: u si trova in una di queste classi. Si ponga:

W = classe di equivalenza in cui esiste u

R = restrizione di R' a W

$b = \{v\}$ (il mondo in cui è vero $\neg\beta$)

I = restrizione di I' a W

Si ha allora:

Lemma 1: $\langle W, R, b, I \rangle$ è un modello per KT5Q

La dimostrazione segue dal fatto che R è b-seriale in quanto $(\text{om } u)(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b)$. Le proprietà formali di R e di I sono ereditate da quelle di R' e I'.

Lemma 2:

$(\text{om } \alpha \in \text{ON})(\text{om } v \in W)(\langle W, R, b, I \rangle \models_v \alpha \Leftrightarrow \langle W', R', I' \rangle \models_v \alpha)$

La dimostrazione segue dalla coincidenza dei modelli rispetto alla parte aletica.

Pertanto, la dimostrazione del teorema prosegue nella maniera seguente:

$\langle W, R, b, I \rangle \models_u X$ ♠ da * per L2
 $uRv \text{ et } v \in b \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v \neg\beta$ da ** per L2 e def. b

D'altra parte b è l'insieme unico di v. Pertanto:

$\text{non}(\text{ex } v)(uRv \text{ et } v \in b \text{ et } \langle W, R, b, I \rangle \models_v \beta)$ per $b = \{v\}$

Ma allora:

$\langle W, R, b, I \rangle \not\models_u P\beta$ ♠♠ def. \models
 $(\text{ex } \langle W, R, b \rangle \text{ per KT5Q})(\text{ex } I)(\text{ex } u)(\langle W, R, I \rangle \models_u X \text{ et } \langle W, R, I \rangle \not\models_u P\beta)$ Iex da ♠ e ♠♠ e L1
 $X \Vdash_{\text{KT5Q}} P\beta$ def. $X \Vdash$
 $X \Vdash_{\text{KT5Q}} P\beta$ per caratterizzazione

NOTA: È da notare l'essenzialità del fatto che si tratti d'obblighi o permessi elementari. Controprova:

$$1. \Box(\alpha \rightarrow \beta) \not\vdash_{K-\Box O} O(O\alpha \rightarrow \beta)$$

$$2. \Box(\alpha \rightarrow \beta) \not\vdash_{K-\Box O} \Box(O\alpha \rightarrow \beta)$$

ad 2. segue dal fatto che $\Box(\alpha \rightarrow \beta) \not\parallel_{K-\Box O} \Box(O\alpha \rightarrow \beta)$. È infatti possibile esibire un contromodello che verifica l'antecedente e falsifica il conseguente. Si lascia la dimostrazione come esercizio.

ad 1.

$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{K-\Box O} O\alpha \rightarrow O\beta$	A, $\Box O$, DistrO
$O\alpha \rightarrow O\beta \quad O\beta \rightarrow \beta \vdash_{K-\Box O} O\alpha \rightarrow \beta$	per MP
$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \quad O\beta \rightarrow \beta \vdash_{K-\Box O} O\alpha \rightarrow \beta$	KS
$O\Box(\alpha \rightarrow \beta) \quad O(O\beta \rightarrow \beta) \vdash_{K-\Box O} O(O\alpha \rightarrow \beta)$	O-N
$\vdash_{K-\Box O} O(O\beta \rightarrow \beta)$	Tesi di $K-\Box O$
$O\Box(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{K-\Box O} O(O\alpha \rightarrow \beta)$	O-N

D'altra parte:

$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{K-\Box O} O\Box(\alpha \rightarrow \beta)$ perché

$\Box\Box\alpha \vdash_{K-\Box O} \Box\Box\alpha$	A
$\Box\Box\alpha \vdash_{K-\Box O} O\Box\alpha$	per $\Box O$
$\Box\alpha \vdash_{K-\Box O} O\Box\alpha$	per A4

per cui:

$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \vdash_{K-\Box O} O(O\alpha \rightarrow \beta)$	KS
---	----